

文章编号

引力波探测中激光干涉量子噪声计算

曾晓强¹, 李磐¹, 董鹏^{2*}, 杨然^{1*}

(1. 中国科学院 力学研究所, 北京 北京 100080;

2. 国科大杭州高等研究院基础物理与数学科学学院 引力波宇宙太极实验室, 浙江 杭州 310024)

摘要: 量子噪声是影响激光干涉引力波探测的主要噪声之一。为应对量子噪声, 进一步提高探测灵敏度, 本文应用量子传递函数方法对传统迈克尔逊干涉仪的量子噪声源头归咎进行了重新推导, 结果表明, 对于辐射压噪声和散粒噪声这两类量子噪声, 辐射压噪声可直接归咎于干涉仪暗口处真空涨落的正交振幅涨落, 散粒噪声仅在一定条件下可完全归咎于暗口处的正交相位涨落。在明确量子噪声的源头归咎前提下, 压缩光技术可提高探测器的灵敏度, 但当采取不等臂干涉探测方案时, 必须注意两不等臂臂长之间的长度差异关系。最后, 本文也提及了如若在空间引力波探测中推广应用压缩光技术时可能需要注意的问题, 包括弱光锁相放大技术的影响、不同干涉仪间的联系、数据后处理的影响以及压缩光的产生。

关键词: 引力波探测; 量子噪声; 真空涨落; 压缩光

中图分类号: O431.2

文献标识码: A

Calculation of laser interference quantum noise in gravitational wave detection

ZENG Xiao-qiang¹, LI Pan¹, DONG Peng^{2*}, YANG Ran^{1*}

(1. *Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;*

2. *Taiji Laboratory for Gravitational Wave Universe, School of Fundamental Physics and Mathematical Sciences, Hangzhou Institute for Advanced Study, University of Chinese Academy of Sciences, Hangzhou 310024, China)*

* Corresponding author, E-mail: dongpeng@ucas.ac.cn; yangran@imech.ac.cn

Abstract: Quantum noise is one of the main noises that affect laser interference gravitational wave detection. To cope with quantum noise and further improve detection sensitivity, this paper applies the quantum transfer function method to rederive the source attribution of quantum noise in traditional Michelson interferometers. The results show that for two types of quantum noise, radiation pressure noise and shot noise, radiation pressure noise can be directly attributed to the amplitude quadrature fluctuations of vacuum fluctuations at the unused port of the interferometer, while shot noise can only be completely attributed to the phase quadrature fluctuations at the unused port under certain conditions. Under the premise of clearly knowing the source attribution of quantum noise, squeezed light technology can improve the sensitivity of detectors. However, when adopting unequal arm interference detection schemes, attention must be paid to the length difference between the two unequal arm lengths. Finally, this article also mentions the issues that may need to be considered when promoting the application of squeezed light technology in space gravitational wave detection, including the impact of weak light lock-in amplification technology, the relationship between different interferometers, the impact of data post-processing, and the generation of squeezed light.

收稿日期: 2024-09-30; 修订日期: 2024-11-22

基金项目: 国家重点研发计划资助 (2020YFC2200901); 国科大杭州高等研究院专项资金 (No. 2022ZZ01006)

Supported by the National Key Research and Development Program (2020YFC2200901), the Research Funds of Hangzhou Institute for Advanced Study, UCAS (No. 2022ZZ01006)

Key words: Gravitational wave detection; Quantum noise; Vacuum fluctuation; Squeezed light

1 引言

引力波作为时空结构的微扰，在其经过时，时空会被相应地挤压、拉伸，而激光干涉引力波探测便借由这一特性，利用干涉方法记录读出引力波经过时所引起的自由悬浮测试质量之间的相对位移，从而直接探测引力波信号。

在引力波信号的具体探测过程中，探测器固有的本底噪声限制着其对本就微弱的引力波信号的响应记录。为更好地响应不同频段的引力波信号，除地面探测方案外，能够避开地表震动和地表引力梯度噪声以及能实现更长干涉臂长的空间引力波探测方案也被提出并发展^[1-2]。对于空间引力波探测，探测器本底噪声主要分为加速度噪声和干涉仪噪声两类^[1]，其中前者描述测试质量相较自由悬浮的偏离，后者描述进行激光干涉、测量读出时的误差。量子噪声作为干涉仪噪声中一类较为主导的噪声，其主要分为散粒噪声和辐射压噪声两类，但在空间探测中，百万公里量级的干涉臂长使得辐射压很小，所以可能更加关注散粒噪声^[1,3]。

关于引力波探测过程中量子噪声的应对，Caves^[4]最早指出，对于地面等臂激光干涉探测器，散粒噪声和辐射压噪声在源头上可归咎于探测器暗口处的真空涨落，并且在明确此噪声源头后，其提出在探测器暗口处注入具有更低不确定度的压缩光，以替代此前的真空涨落，可降低探测器的量子噪声进而提高探测器的灵敏度。遵循这一思路，并在取得一系列关键进展后^[5,6]，地面探测于 2010 年成功在探测器上应用压缩光技术^[7]，而后续压缩光技术在地面探测器上的常规化应用也证实了其对量子噪声的强大应对效果^[8-9]。目前，地面探测器上的压缩光技术已更新至频率依赖压缩光^[10-11]，其通过失谐腔来旋转所注入的压缩光在不同频率处的压缩角度，以期对地面探测目标频段内的灵敏度能实现宽谱提高。对于仍处于发展阶段的空间引力波探测，量子噪声的噪声应对源头及应对方式尚未有分析。

本文应用量子传递函数方法^[12]对传统迈克尔逊干涉仪的量子噪声源头进行了重新推导，结论可推广至不等臂干涉仪。空间引力波探测的干涉链路类似不等臂干涉，但由于弱光锁相放大技术^[13]的采用又有所不同，并且空间干涉链路更为复杂，所以对于空间引力波探测中量子噪声的源头归咎以及可能的压缩光应对方式的推广应用仍需进一步分析。本文最后也提及了在空间引力波探测中推广应用压

缩光技术时可能需要注意的问题。

2 具体计算

2.1 光场量子噪声的描述

对于由湮灭算符 \hat{a} 表示的单模光场，其特性可通过正交振幅算符 \hat{X}_1 和正交相位算符 \hat{X}_2 描述，两者满足关系 $\hat{a} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2$ 。算符 \hat{X}_1 、 \hat{X}_2 的对易关系为： $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$ ，于是由测不准原理可知二者的不确定度关系^[14]为：

$$V_1 \cdot V_2 \geq \frac{1}{16}, \quad (1)$$

其中： $V_i = \left\langle \left(\hat{X}_i - \langle \hat{X}_i \rangle \right)^2 \right\rangle (i=1, 2)$ 。此不确定度源自量子力学的概率本质，是任何测量都无法回避的干扰。

对于相干态光场（包括真空涨落），其在正交振幅和正交相位上有着相同的不确定度且满足最小测不准关系，即： $V_1 = V_2 = 1/4$ ；而对于压缩态光场，其在某一方向上相较相干态有着更小的不确定度，即： $V_i < 1/4 (i=1 \text{ or } 2)$ 。

2.2 辐射压噪声部分推导

在激光干涉引力波探测中，辐射压噪声指激光光束作用于测试质量上，使得测试质量间由于光压的不一致所产生的相对位移^[3]，其并非由引力波信号引起。

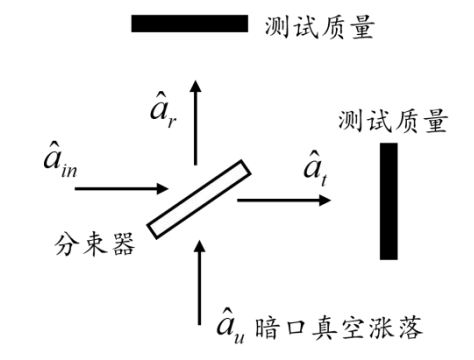


图 1 第一次分束示意图

Fig.1 Schematic diagram of the first beam splitting

对于如图 1 所示的标准迈克尔逊干涉仪, 假定分束器为 50:50 分束器, 即分束器的强度反射系数 $\varepsilon = 1/2$, 则在考虑了暗口处的真空涨落后, 出射光束与入射光束间的关系为^[12]:

$$\begin{cases} \hat{a}_r = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_{in} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_u \\ \hat{a}_t = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_{in} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_u \end{cases}, \quad (2)$$

其中: \hat{a}_{in} 表示入射光束, \hat{a}_u 表示干涉仪暗口处的真空涨落, \hat{a}_t 、 \hat{a}_r 分别表示经过分束器后的透射光束与反射光束。

将任一光场的湮灭算符 \hat{a} 进行线性化表示^[12]:

$$\hat{a} = \langle \hat{a} \rangle + \delta \hat{a}, \quad (3)$$

其中: $\langle \hat{a} \rangle$ 反映光场复振幅的平均值, $\delta \hat{a}$ 表示单模场 \hat{a} 关于均值的涨落起伏。通过调整所选取的相对相位, 可取 $\langle \hat{a} \rangle$ 为实数, 后续分析按此约定。定义

其中: $\delta \hat{X}_1 = 1/2(\delta \hat{a} + \delta \hat{a}^+)$, $\delta \hat{X}_2 = i/2(\delta \hat{a}^+ - \delta \hat{a})$ 。由(2)式所反映的分束器的线性特征, 并对于实际光束转换到频域分析, 则有:

$$\begin{cases} \delta \hat{X}_{1,r}(\Omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta \hat{X}_{1,m}(\Omega) + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta \hat{X}_{1,u}(\Omega) \\ \delta \hat{X}_{1,t}(\Omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta \hat{X}_{1,m}(\Omega) - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta \hat{X}_{1,u}(\Omega) \end{cases}, \quad (4)$$

其中 Ω 是相较光束中心频率的频率差。

由(3)式并忽略二阶小量, 可将光子数算符表示为^[12]:

$$\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a} = \langle \hat{a} \rangle^2 + 2\langle \hat{a} \rangle \delta \hat{X}_1. \quad (5)$$

当干涉仪暗口处为真空涨落时, 由(2)、(4)、(5)式可得:

$$\underline{\Delta \hat{n}} = \hat{n}_r - \hat{n}_t = 2\langle \hat{a}_{in} \rangle \delta \hat{X}_{1,u}(\Omega), \quad (6)$$

$$V_{\Delta \hat{n}} = 4\langle \hat{a}_{in} \rangle^2 V_{1,u}(\Omega), \quad (7)$$

其中 $V_{\Delta \hat{n}}$ 为干涉仪两臂光子数差异的涨落方差, 反映两臂光束对于末端测试质量辐射压力的不同, 可见辐射压噪声在相差一定比例系数下即为探测器暗口处真空涨落的正交振幅涨落, 且比例系数反映其与输入端激光功率有关。

2.3 散粒噪声部分推导

散粒噪声指探测器接收端干涉光强读出时, 由于光强存在涨落波动而使得读出的相位也存在相应的涨落波动^[3]。

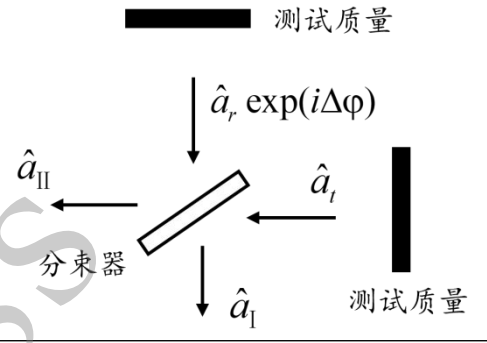


图 2 第二次分束示意图

Fig.2 Schematic diagram of the second beam splitting

图 1 中分束后的 \hat{a}_r 、 \hat{a}_t 在干涉仪两臂传播, 经由两端的测试质量反射后将再次于分束器处汇合, 忽略两光束相位演化的共同部分, 假定额外相位差 $\Delta\phi$ 计于 \hat{a}_r , 则再次到达分束器时两光束为 $\hat{a}_r \exp(i\Delta\phi)$ 、 \hat{a}_t , 具体如图 2 所示, 则此时出射光路与入射光束间关系为^[12]:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_r \exp(i\Delta\phi) - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_t \\ \hat{a}_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_r \exp(i\Delta\phi) + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_t \end{cases}. \quad (8)$$

关注干涉仪接收端的 \hat{a}_1 光束, 则由(2)、(8)式得:

$$\hat{a}_1 = i \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \exp\left(\frac{i\Delta\phi}{2}\right) \hat{a}_{in} + \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \exp\left(\frac{i\Delta\phi}{2}\right) \hat{a}_u, \quad (9)$$

而只有当:

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = n\pi + \delta\theta, \quad (10)$$

其中 $n \in \mathbf{Z}$, $\delta\theta$ 为精密测量时的信号相位小量, 表示在后续计算过程中可忽略二阶小量 $\delta\theta\delta\hat{a}$, 此时才有: $\delta\hat{X}_{2,l}(\Omega) = \delta\hat{X}_{2,u}(\Omega)$, 即:

$$V_{2,l}(\Omega) = V_{2,u}(\Omega), \quad (11)$$

表示干涉仪接收端光束反映的两臂额外相位差信息的不确定度即为探测器暗口处真空涨落的正交相位涨落。

3 讨论

3.1 结果应用

地面引力波探测中, 基本采用等臂激光干涉方案, 而由于引力波所引起的应变信号微弱, 此时自动满足(10)式条件, 即为: $\frac{\Delta\varphi}{2} = \delta\theta$, 所以, 对于地面等臂探测器, 辐射压噪声和散粒噪声可分别归咎于探测器暗口处真空涨落的正交振幅涨落和正交相位涨落, 此时, 针对探测目标频段, 在暗口处注入相应类型压缩光以代替真空涨落, 则可提高探测器的灵敏度。

当采取不等臂激光干涉方案时, 由前述推导可知, 辐射压噪声仍可直接归咎于暗口处的正交振幅涨落, 但当不满足(10)式条件时, 由(9)式可见, 此时散粒噪声为真空口和入射光束的耦合, 所以由(10)式条件知, 对于不等臂激光干涉, 以实际中常采用的 TEM_{00} 光束为例, 仅在两不等臂臂长关系满足^[15]:

$$\arctan \frac{2L_1}{z_R} - \arctan \frac{2L_2}{z_R} = 2n\pi, \quad (12)$$

其中 z_R 为瑞利长度, L_1 、 L_2 分别为两臂长度, n 为任意整数, 散粒噪声才可完全归咎为暗口处的正交相位涨落, 此时应用压缩光或许才可最大程度地提高探测器灵敏度。

3.2 可能的实验验证方案

为观察验证两类噪声与探测器暗口处真空涨落

的联系, 地面探测团队通过在干涉仪暗口处注入不同类型、不同压缩程度的压缩光, 分别在辐射压噪声和散粒噪声占主导的频段来看最终输出端灵敏度曲线的变化情况^[16]。在此, 提出另一种对本文前述结论或许可行的实验验证方案, 因为重点强调不等臂干涉时散粒噪声的特殊性, 所以仅关注这一情况。实验的前提是震动噪声和热噪声等其他噪声已被良好地抑制, 使得在一定频段内散粒噪声占主导, 并且后续在此频段内观察。简化的实验装置图如图3所示。干涉仪两端的全反镜固定, 对于干涉仪的出射光束, 使之与另一激光器所发出的参考光束进行平衡零差探测, 通过调整参考光束相较于干涉仪出射光束的相对相位(图中未标出这一过程), 便可利用后续所得的差电流得出干涉仪出射光束的正交相位涨落。预期仅在两不等臂臂长关系满足(10)式

时, 干涉仪出射光束的正交相位涨落与干涉仪入射端激光器的噪声程度无关, 为固定的真空涨落。

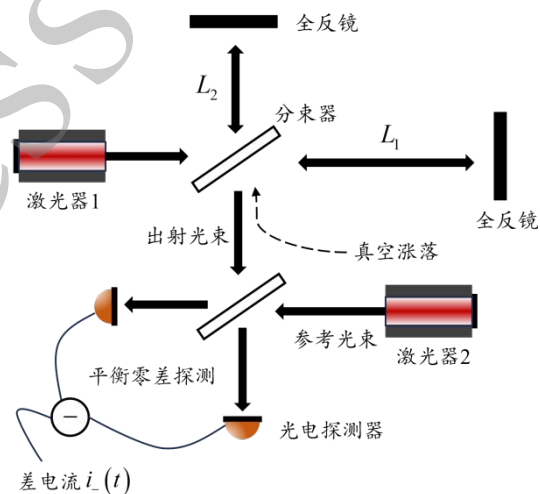


图3 可能的验证实验的简化布局

Fig.3 Simplified layout of possible validation experiments

3.3 空间引力波探测拓展讨论

空间引力波探测的灵敏度同样受量子噪声限制, 而其干涉链路类似不等臂干涉, 但具体又有不同, 且空间干涉链路较地面情况更为复杂, 所以, 若想在空间探测中推广地面探测已采用的压缩光技术来应对量子噪声, 可能仍需注意以下问题:

a、弱光锁相放大技术的影响 在空间引力波探测中, 由于航天器间百万公里量级臂长的原因, 卫星所能接收到另一卫星发射过来的激光光束功率微弱, 因而无法将此光束直接返回到原发射卫星, 所以采取弱光锁相放大技术来应对这一问题^[13], 这使得空间干涉链路不同于不等臂的迈克尔逊干涉,

所以, 对于空间引力波探测中量子噪声的噪声应对源头, 可能仍需结合具体干涉链路进行分析。

b、不同干涉仪间的联系 空间引力波探测为监测两自由悬浮测试质量之间的相对位移分层次使用了多个干涉仪^[1]: 星间干涉仪(监测两卫星上光学平台间的相对位移)、测试质量干涉仪(监测卫星上测试质量与光学平台间的相对位移)、参考干涉仪(监测卫星上两激光器间的误差), 所以压缩光的应用需结合整体情况分析, 以判断压缩光最终可应用于全局抑或某一环节。

c、数据后处理的影响 在具体探测中, 对于轨道漂移及因不等臂干涉而无法通过共模抑制消除的激光频率噪声等因素的影响^[1], 需要通过后期 TDI (Time-Delay Interferometry) 数据处理手段来应对, 所以也需分析数据后处理是否对压缩光技术的应用效果有所影响。

d、压缩光的产生 空间引力波探测的目标频段为 $0.1\text{mHz}\sim 1\text{Hz}$ (以 LISA 和太极计划为例), 对于该频段压缩光的产生难易问题以及空间应用时压缩光源的稳定性问题也需分析。

4 结论

本文针对传统迈克尔逊干涉仪重新推导了激光干涉引力波探测中量子噪声的源头归咎, 表明辐射压噪声可直接归咎于干涉仪暗口处真空涨落的正交振幅涨落, 散粒噪声仅在一定条件下可完全归咎于暗口处的正交相位涨落。在明确量子噪声源头归咎的前提下, 使用具有更低不确定度的压缩光能够进一步提高引力波探测的灵敏度, 但对于不等臂探测方案需另加注意。空间引力波探测类似不等臂干涉, 但具体有所不同, 所以压缩光技术的推广应用仍需结合探测细节进一步具体分析。

参考文献:

- [1] COLPI M, DANZMANN K, HEWITSON M, et al. LISA Definition Study Report[J]. *arXiv preprint*, 2024, arXiv:2402.07571.
- [2] HU W R, WU Y L. The Taiji Program in Space for gravitational wave physics and the nature of gravity[J]. *Natl. Sci. Rev.*, 2017, 4(5): 685-686.
- [3] SAULSON P R. *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*[M]. 2nd ed. Hackensack, NJ: World Scientific, 2017.
- [4] CAVES C M. Quantum mechanical noise in an interferometer[J]. *Phys. Rev. D*, 1981, 23: 1693-1708.
- [5] MCKENZIE K, GROSSE N, BOWEN W P, et al. Squeezing in the Audio Gravitational-Wave Detection Band[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 93: 161105.
- [6] VAHLBRUCH H, CHELKOWSKI S, HAGE B, et al. Coherent Control of Vacuum Squeezing in the Gravitational-Wave Detection Band[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, 97: 011101.
- [7] ABADIE J, ABBOTT B P, ABBOTT R, et al. A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit. *Nature Phys.*, 2011, 7: 962-965.
- [8] TSE M, YU H C, KIJUNCHOON N, et al. Quantum-Enhanced Advanced LIGO Detectors in the Era of Gravitational-Wave Astronomy[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123: 231107.
- [9] ACERNESE F, AGATHOS M, AIELLO L, et al. Increasing the Astrophysical Reach of the Advanced Virgo Detector via the Application of Squeezed Vacuum States of Light[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, 123: 231108.
- [10] GANAPATHY D, JIA W, NAKANO M, et al. Broadband Quantum Enhancement of the LIGO Detectors with Frequency-Dependent Squeezing[J]. *Phys. Rev. X*, 2023, 13: 041021.
- [11] ACERNESE F, AGATHOS M, AIN A, et al. Frequency-Dependent Squeezed Vacuum Source for the Advanced Virgo Gravitational-Wave Detector[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2023, 131: 041403.
- [12] BACHOR H A, RALPH T C. *A Guide to Experiments in Quantum Optics*[M]. 3rd ed. Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2019.
- [13] 罗子人, 白嫻, 边星, 等. 空间激光干涉引力波探测[J]. *力学进展*, 2013, 43: 415-447.
LUO Z R, BAI S, BIAN X, et al. Space laser interferometry gravitational wave detection[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(4): 415-447. (in Chinese)
- [14] GERRY C C, KNIGHT P L. *Introductory Quantum Optics*[M]. New York: Cambridge University Press, 2005.
- [15] GRYNBERG G, ASPECT A, FABRE C. *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized*

Light[M]. New York: Cambridge University Press, 2010.

- [16] ACERNESE F, AGATHOS M, AIELLO L et al. Quantum Backaction on kg-Scale Mirrors: Observation of Radiation Pressure Noise in the Advanced Virgo Detector[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2020, 125: 131101.

作者简介:

董鹏(1987-), 男, 北京市人, 博士, 高级工程师, 硕士生导师, 2011 年于中国科学院紫金山天文台获得博士学位, 主要从事空间激光干涉测量技术的研究。E-mail: dongpeng@ucas.ac.cn



杨然(1981-), 女, 博士, 副研究员, 2011 年于华中科技大学获博士学位, 主要从事量子精密测量及干涉仪系统噪声模型仿真和分析。E-mail: yangran@imech.ac.cn



曾晓强(2001-), 男, 河南信阳人, 在读研究生, 主要研究方向为引力波探测中干涉仪量子噪声。E-mail: zengxiaoqiang22@mails.ucas.ac.cn



in press