

## 层析成像图像重建算法综述

阎春生<sup>1\*</sup>, 廖延彪<sup>2</sup>, 田 芊<sup>3</sup>

(1. 浙江大学 光电系 浙江省传感重点实验室, 浙江 杭州 310058;  
2. 清华大学 电子系, 北京 100084; 3. 清华大学 精密仪器与机械学系, 北京 100084)

**摘要:**介绍了层析成像技术的图像重建算法,并从正向问题数学模型的简化和反向问题数学模型的映射结构的角度比较了各种算法的特点和优劣。研究表明:用本质是线性算法的各种变换方法重建图像存在严重失真,而卷积滤波的引入可以使变换方法的重建效果有所改善;基于导数搜索的迭代算法对初始值依赖性强、收敛速度慢并且容易陷入局部最优解;基于 Fourier 变换的方法具有本质的局限性;小波变换则可以同时刻画图像时域和频域的细节特征;有限元法通过重建对象像素的智能划分可以简化正问题的复杂性;而具有物理背景的蒙特卡罗法、模拟退火法、遗传算法、粒子滤波法及神经网络法更适合于复杂且非线性的图像重建;智能化、仿生化、并行化以及各种算法的融合是层析成像图像重建算法的发展趋势。

**关键词:**层析成像;图像重建算法;多相流

中图分类号:R445;TP391 文献标识码:A doi:10.3788/CO.20130605.0617

## Image reconstruction algorithms of computed tomography

YAN Chun-sheng<sup>1\*</sup>, LIAO Yan-biao<sup>2</sup>, TIAN Qian<sup>3</sup>

(1. Zhejiang Provincial Key Laboratory for Sensing Technologies,  
Department of Optoelectronic, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;  
2. Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;  
3. Department of Precision Instruments and Mechanology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

\* Corresponding author, E-mail: yanacs@zju.edu.cn

**Abstract:** The image reconstruction algorithms of tomography are introduced. The characteristics of the various algorithms are compared from the points of view of the forward model simplification and reverse model mapping structure. Studies show that the various conversion methods belonging to linear algorithm have serious distortion, which can be improved by convolution filtering. The various iterative algorithms based on derivative search have strong initial value dependence and slow convergence and are easy to fall into a local optimal solution. The various Fourier transform methods have intrinsic limitation and the wavelet transform can characterize both the time and frequency domain minutiae of the image. The finite element method can simplify the forward model by smart designing pixels of the reconstruction object. With the physical background, the Monte Carlo

收稿日期:2013-07-21;修订日期:2013-09-18

基金项目:光通信、光传感器件与技术科技创新团队资助项目(No. 2010R50007);高等学校学科创新引智计划资助项目(No. B07031)

method, simulated annealing, genetic algorithms, particle filter method and the neural network method are more suitable for complex and nonlinear image reconstruction. Moreover, intelligentization, modeling, parallelization, and integration of various algorithms are the trends for the image reconstruction algorithms of the tomography.

**Key words:** tomography; image reconstruction algorithm; multiphase flow

## 1 引言

层析成像技术在医疗、生物及工业领域具有非常广泛的应用。它的基本原理是利用一定的传感器结构分层地提取被测对象的相关信息,再利用一定的算法重现所需要的信息,多层信息的叠加即可重现对象的三维信息。根据提取信息的原理和种类的不同,传感器可以用各种射线(X射线、 $\gamma$ 射线、中子、离子、正电子等)、电磁场、光、声等作为信息载体,亦可以以各种方式排列和分布,并且可以以各种图像重建算法反演对象的相关信息。CT技术发明伊始曾对放射学的诊断做出过划时代的贡献。随着科学研究和工业生产的不断发展,CT技术的应用范围也不断拓展,从噬菌体的分子结构到超新残星的X射线结构,CT技术有力地促进着各种学科的交叉和融合。

## 2 图像重建算法

图像重建是CT技术的关键组成部分,它是根据层析成像的物理本质和光路、射线或场在被测空间的分布,对被测参数进行反演的数学方法,如图1所示。本节将详细介绍CT发明以来的一些常用的图像重建原理和算法。

### 2.1 变换方法

层析成像的实质是先用一定的信息载体(如光及各种射线等)扫描并提取被测对象的相关信息,得到足够的投影数据,再反向求解这些数据还原被测信息的过程。图像重建的原理可以用一个简单的矩阵方程的求解来表达,如式(1)所示,但其求解过程却并不简单。

$$T = DP. \quad (1)$$

图像重建过程涉及3个矩阵:投影数据矩阵 $T$ (即信息载体沿对象的路径积分,如探测器接收

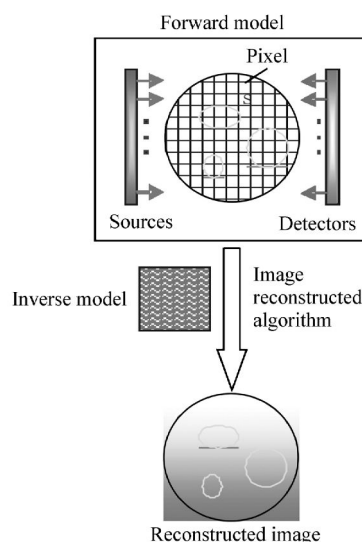


图1 层析成像技术原理示意图

Fig. 1 Schematic diagram of tomographic technology

到的光强度值等,是 $N$ 维列向量)、待测参量矩阵 $P$ (即对象的相关信息,如某物体的衰减系数等,是 $M$ 维列向量)、信息载体路径长度矩阵 $D$ (是 $N \times M$ 维矩阵)。当信息载体沿直线传播并且矩阵 $D$ 较简单时,可直接求逆,即 $P = D^{-1}T$ ,但一般而言,正向过程采集的投影数据量较大,并且有很大的背景噪声,或者有些实际问题条件所限投影数据严重不足,这些情况都会造成矩阵奇异或大型且稀疏,不能直接求逆,即使可以得到结果也未必是对象的真实信息,因此各种算法便应运而生。

#### 2.1.1 线性反向投影法(Linear Back Projection, LBP)<sup>[1-2]</sup>

LBP首先在人体同位素CT成像中得到应用,其核心思想以光CT为例,首先测量得到光从各个方向和位置通过对象时的投影值(最简单的是光被衰减后的强度值),如图2所示。假设每条光路上的像素对该光线具有相同的衰减,其衰减值可以由投影值除以该光路的像素数目得到,即所谓的反投影。将测量区域每个像素在每次反

投影中得到的衰减值全部叠加,得到反投影像素矩阵,归一化处理后得到重建图像。

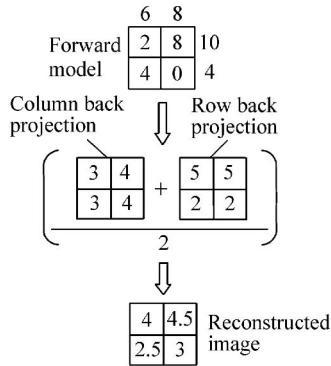


图 2 线性反投影算法原理图

Fig. 2 Schematic diagram of linear back projection algorithm

LBP 算法模型过于简单,虽然具有最快的计算机重建速度,但由于原理上的缺陷,其重建图像失真非常严重。由图 1 的正向问题模型和重建图像的较大差距可知,对于复杂对象的图像重建,一般会在投影光路上出现显著的星形状噪声,因此其结果只能提供定性分析。用灰度等级图像加上一定的阈值判决规则,取代单纯的黑白图像是改进 LBP 的方法之一,但只能够在一定程度上减小图像中低灰度等级的噪声<sup>[3]</sup>。

2.1.2 最小二乘法(Least Squares Method, LSM)

LSM<sup>[4]</sup> 是高斯在天文计算中提出的数学方法,基本原理是在实数域上寻找一个最佳的  $P$  值,使得  $\|DP - T\|^2$  最小,LSM 较 LBP 更进一步,能够尽可能利用不稳定数据提取有用信息,其解可表示为:

$$P = (D^T D)^{-1} D^T T, \quad (2)$$

式中,  $D^T$  为  $D$  的转置矩阵,但对于实际情况,投影数目  $N$  远远小于被测对象像素的个数  $M$ , 因此  $D^T D$  是一个奇异矩阵,需要在 SLM 准则中加入约束机制,如在三维电阻率反演中采用光滑约束,其解变为:

$$P = (D^T D + \lambda I)^{-1} D^T T, \quad (3)$$

式中:  $\lambda$  为拉格朗日常数,  $I$  为单位矩阵,光滑约束的权重由  $\lambda$  的大小决定,但解的非唯一性以及图像重建速度慢是其主要的不足。不等式约束是一种新的尝试<sup>[5]</sup>,但这种约束方法的应用因为直接

依赖于 CT 正向问题而受到很大的制约。

2.1.3 奇异值分解方法(Singular-value Decomposition, SVD)<sup>[6]</sup>

SLM 中,求解  $D^T D$  的逆矩阵涉及到  $D^T D$  奇异以及对舍入误差敏感等问题,其改进办法是利用 SVD。

SVD 定理中存在两个正交矩阵  $V$  和  $U$ ,使得:

$$V^T D U = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ , 且  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > 0$ , 其 SVD 分解为:

$$D = V \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T. \quad (5)$$

$\sigma_i (i = 1, 2, \dots, r)$  称为  $D$  的奇异值,因此  $D$  的广义逆矩阵  $D^+$  可表示为:

$$D^+ = U \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T. \quad (6)$$

因此,反投影的解可表示为:

$$P = D^+ T = U \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T T. \quad (7)$$

相比于 LBP, SVD 方法的主要优点在于其广义逆最小模解可以较好地地区分相邻的大小物体,不过其重建图像还会因为存在大量散斑而严重失真。由于最小模解只是理论解,以及  $D$  的奇异性,反投影的解不唯一,在投影数据不足且不准确的情况下,有图像重建误差是必然的,将 SVD 与共轭梯度迭代相结合,可在一定程度上改善 SVD 的不足<sup>[7]</sup>。

2.1.4 Tikhonov 正则化方法<sup>[8]</sup>

解决 SLM 中  $D^T D$  逆矩阵求解涉及到的病态问题的另一种方法是 Tikhonov 正则化,其核心思想是在实数域上寻找一个最佳的  $P$  值,使得  $\|DP - T\|^2/2 + \gamma R(P)$  最小,其中  $\gamma$  为正则化因子,  $R(P) = \|L(P - \bar{P})\|^2$  为正则化函数,  $\bar{P}$  为  $P$  的估计值,一般由先验知识所确定。当  $\bar{P}$  为 0,  $L$  为单位矩阵时,上述方程可以化为标准的 Tikhonov 正则化方程,即:

$$(D^T D + \gamma I) P = D^T T. \quad (8)$$

其解为:

$$\hat{P} = (D D^T + \gamma I)^{-1} D^T T. \quad (9)$$

Tikhonov 正则化过程中引入了二范数以增强图像重建的稳定性,但由于二范数形式具有平滑图像的作用,因此重建图像的边缘信息无法恢复。

### 2.1.5 总变差正则化方法(TV 正则化)<sup>[9-10]</sup>

为了解决 Tikhonov 正则化引起的图像边缘信息丢失导致分辨率下降的问题,总变差正则化方法(也称 TV 正则化)是一种很好的替代算法。与 Tikhonov 正则化不同之处在于,TV 正则化将  $P$  的总变差作为正则化函数,即  $R(P) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla P|^2 + \varepsilon} d\Omega$ ,其中  $\varepsilon$  为一个接近 0 的常数以避免  $\nabla P$  为 0,将  $R(P)$  离散化,因此 TV 正则化实质是求解  $\|DP - T\|^2/2 + \gamma \sum_i \sqrt{\|L_i P\|^2 + \varepsilon}$  最小值的问题,其中  $\|L_i P\|^2$  为对应不同区域的灰度方差,可由牛顿-拉夫逊迭代算法计算。

## 2.2 迭代重建法 (Iterative Reconstruction Method, IRM)

由于  $N \times M$  矩阵求逆需  $M^3$  次计算,重建速度慢、耗时是变换技术的固有弱点。另外,变换方法也不适用于媒质中波或场不是沿直线传播的情况。因此,IRM 被广泛应用于电容等 CT 技术中。

IRM 的核心思想是,首先初始化像素矩阵,将对象的每一个像素赋予初值,由这些初值根据 CT 的正向过程计算出每一个投影值,并不断与测量到的真实投影值相比较,不断修正像素矩阵的每一个像素值,直到计算得到的投影值与测量值差在允许的范围之内为止,目前常用的 IRM 有:

(1) Tikhonov 迭代法 (TIRM)<sup>[11]</sup>,由于投影比像素的个数少得多,因此方程(1)需要用正则化的方法求解,TIRM 即属于此法,其基本算法如下式:

$$\begin{cases} P_{k+1} = P_k + \alpha(D^T D + \gamma I)^{-1} D^T (T - DP_k) \\ P_0 = 0 \end{cases}, \quad (10)$$

式中: $\alpha$  为松弛因子, $\gamma$  为正则化参数。TIRM 的稳定性和收敛速度较高,但  $\gamma$  的选取一般由经验决定,限制了其应用。

(2) Landweber 迭代法 (LIRM)<sup>[12]</sup>,属于最速下降法,广泛应用于流化床中,成像结果较好,其算法如下式:

$$\begin{cases} P_{k+1} = P_k + \alpha_k D^T (T - DP_k) \\ P_0 = D^T T_0 \end{cases}, \quad (11)$$

式中, $\alpha$  用于算法收敛速度的控制,为迭代步长, $T_0$  为测量得到的投影值矩阵。

(3) 同步迭代重建技术 (SIRT)<sup>[13]</sup>,以 LBP 算法为基础,由于 SIRT 在每次迭代时同时修正所有像素的值,使得测量数据中的噪声得以有效抑制,但其收敛速度较慢,图像有模糊效应,SIRT 的算法如下式:

$$P_{k+1} = P_k + \alpha_k D^T \frac{(T - DP_k)}{\text{diag}(DD^T)}. \quad (12)$$

IRM 算法简单,可以对不同格式采样数据或采样不完全的数据进行图像重建,还可以结合先验知识求解,但计算量大,收敛速度慢,难以重建大的图像。另外,IRM 收敛速度受初值的影响较大,通过对图像逐级分块的迭代方法可以较好地改善重建速度和精度<sup>[14]</sup>。

## 2.3 二维 Fourier 图像重建法

如前所述,对象的信息可以由像素点的值表达,由此产生了变换方法及迭代法,像素点越多,图像重建的精度就越高,但数据量也越大,计算就会越慢,限制了其实际的应用。如图 3 所示,一种等价的表达方式是,利用图像的频谱,即用投影的一维 Fourier 系数  $P(\omega, \phi)$  拟合对象图像函数的二维 Fourier 系数  $U(\omega_x, \omega_y)$ ,经过 Fourier 反变换即可得到对象的图像函数  $\mu(x, y)$ ,即使在投影数据不足的情况下,该方法依然有效,其数学模型如下式所示:

$$U(\omega_x, \omega_y) = P(\omega, \phi). \quad (13)$$

对象图像的二维 Fourier 变换为:

$$\mu(x, y) = \iint U(\omega_x, \omega_y) \exp[j(\omega_x x + \omega_y y)] d\omega_x d\omega_y. \quad (14)$$

定义子波的传播方向为:

$$\phi = \tan^{-1}(\omega_y/\omega_x). \quad (15)$$

则  $\phi$  方向投影的一维 Fourier 变换为:

$$p(l, \phi) = \int P(\omega, \phi) \exp(j\omega l) d\omega. \quad (16)$$

因此:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^\infty |\omega| d\omega P(\omega,\phi) \cdot \exp(j\omega l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi B(l,\theta) d\theta, \quad (17)$$

式中： $\omega = \pm\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ ，为投影  $p(l,\phi)$  的一维 Fourier 系数的幅度值， $p(l,\phi)$  为测量数据，在投影角度受限的情况下，完整的频谱数据可以通过在频谱面上进行角度插值得到。该技术被应用于核磁共振光谱量子信息处理中的量子态层析成像中<sup>[15]</sup>，即在一维的实验中探测密度矩阵的所有对角和非对角信息，然后用二维的 Fourier 反变换得到密度矩阵。

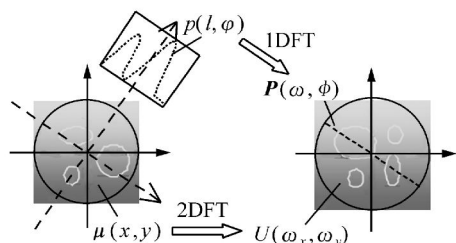


图 3 二维 Fourier 图像重建法原理示意图

Fig. 3 Schematic diagram of two-dimensional Fourier image reconstruction method

### 2.4 滤波反投影图像重建法 (Filtered Back-projection Image Reconstruction, FBP)

星状点扩展函数与对象函数的卷积是造成 LBP 星状噪声的根本原因,FBP 则通过在反投影

之前对投影信号进行滤波来消除造成星状噪声的特殊频率(如利用极化透镜对接收光进行滤波)。Bracewell 和 Riddle 于 1976 年推导出滤波公式为:

$$P^*(x') = K_m P(x') - \int_{-R}^R P(x'') \times \frac{\sin[\pi K_m(x' - x'')]}{\pi^2(x' - x'')} dx'', \quad (18)$$

式中： $P(x')$  和  $P^*(x')$  分别为原始及滤波后的投影值， $R$  为所测对象最大半径。 $K_m$  为投影中的最大空间频率(波数)，由采样定理， $K_m = 1/2W$ ，其中  $W$  为采样间隔。FBP 重建图像的边缘失真来自于重建图像的有限分辨率。FBP 主要有 Radon 变换法、Fourier 滤波法和  $\rho$  滤波的分层图 3 种算法。

#### 2.4.1 Radon 变换法<sup>[16]</sup>

Radon 变换的实质是对对象函数  $f(r,\phi)$  沿投影光线  $L$  的线积分,如图 4 所示。

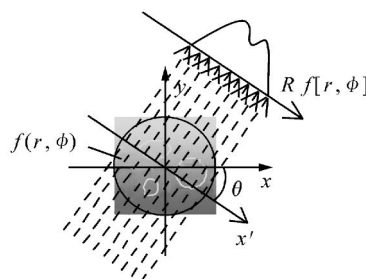


图 4 Radon 变换法原理示意图

Fig. 4 Schematic diagram of Radon transform method

$$Rf[r,\theta] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f[\sqrt{r^2+z^2}, \phi + \tan^{-1}(z/r)] dz & (r \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f[z, \phi + \pi/2] dz & (r = 0) \end{cases}, \quad (19)$$

式中， $r = l \cos(\phi - \theta)$ ，为投影光线  $L$  离原点的距离。Radon 于 1917 年<sup>[17]</sup>证明，无限薄切片上的相关线性衰减系数可以由所有线积分重构，即：

$$\mu(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} p_1(x \cos \phi + y \sin \phi + q, \phi) d\phi dq, \quad (20)$$

式中： $p(r,\phi) = \int \mu(x,y) dz$  为投影值， $p_1(r,\phi) = dp(r,\phi)/dr$ ， $q = r - l \cos(\phi - \theta)$ 。对于有限离散

点、有限投影方向以及有限测量区域，上式可改写为：

$$R^{-1}p(l,\theta) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-E}^E \frac{p_1(r,\phi)}{l \cos(\phi - \theta) - r} dr d\phi. \quad (21)$$

Radon 变换法对于具有连续导数的光滑函数具有较好的重建精度和速度，但当函数奇异时，在奇异点附近将引入较大的误差，可利用包络法、奇

性消去法、分区逼近法等方法进行改进<sup>[18]</sup>,也可以用多幅低分辨率重建图像经信息融合技术重建一幅高分辨率图像来改善重建结果<sup>[19-22]</sup>。

#### 2.4.2 Fourier 变换法

Fourier 变换法是在上述的二维 Fourier 图像重建的 Fourier 反变换中引入滤波函数。式(17)中,内积分  $B(l, \phi)$  可以写为:

$$B(l, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| P(\omega, \phi) \exp(j\omega l) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \phi) W(1 - \xi) d\xi = p(l, \theta) \cdot W(l), \quad (22)$$

式中:

$$p(l, \theta) = F^{-1}[P(\omega, \phi)], \quad (23)$$

$$W(l) = F^{-1}[|\omega|]. \quad (24)$$

由于  $F^{-1}[|\omega|]$  不收敛,可用  $W(\omega)$  函数逼近  $|\omega|$ , 即当  $|\omega| < \omega_c$  时,  $|\omega|$  用  $W(\omega)$  代替,  $\omega_c$  为对象的最高截止频率, 当  $|\omega| > \omega_c$  时,  $W(\omega)$  平滑趋近于 0, 称  $W(\omega)$  为  $|\omega|$  滤波器<sup>[23-24]</sup>, 如 Shepp 和 Logan 提出的 SL 滤波器<sup>[25]</sup>:

$$W(\omega) = \left| \frac{2}{a} \sin \frac{\omega a}{2} \right| \left[ \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega a/2} \right]^2, \quad (25)$$

式中,  $\alpha$  为取样间隔。

#### 2.4.3 $\rho$ 滤波的分层图

以消除直接反投影造成的图像模糊为目的, 其原理基于图及其反投影 Radon 变换的二维 Fourier 变换之间的关系:

$$F_2[f(\omega, \phi)]_{\omega \neq 0} = (|\omega| / 2\pi) F_2[BRf(\omega, \phi)]. \quad (26)$$

其算法如下:

(1) 求  $p$  的反投影  $Bp$ :

$$Bp(l, \theta) = \int_0^\pi p[l \cos(\phi - \theta), \phi] d\phi. \quad (27)$$

(2) 计算其二维 Fourier 变换  $F_2[Bp]$

(3) 得到新函数  $G$ :

$$G(\omega, \phi) = (|\omega| / 2\pi) F_2[Bp(\omega, \phi)]. \quad (28)$$

(4) 估算图像

$$f^* = F_2^{-1}[G]. \quad (29)$$

### 2.5 系列展开法

系列展开法将所重建的对象  $f$  用一组基本图像集的线性组合表达, 即:

$$\hat{f}(l, \theta) = \sum_{j=1}^J x_j b_j(l, \theta), \quad (30)$$

$$b_j(l, \theta) = \begin{cases} 1 & \text{点}(l, \theta) \text{ 在象素 } j \text{ 内} \\ 0 & \text{(} l, \theta \text{) 不在象素 } j \text{ 内} \end{cases}, \quad (31)$$

式中,  $x_j$  是  $f$  在像素  $j$  中的平均值, 基本图像集  $b_j$  确定后, 每一组系数  $x_j$  对应一个重建图像。

两图像函数  $f_1$  和  $f_2$  之间的距离定义如下:

$$d(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^E [f_1(l, \theta) - f_2(l, \theta)]^2 l dl d\theta. \quad (32)$$

一旦基本图像被确定了, 若  $1 \leq j \leq J$ , 则基本图像  $\{b_j\}$  的线性组合所表示的任意图像  $f$  唯一, 且由系数  $x_j$  确定, 因此图像重建就变成寻找合适  $x_j$  的问题。

### 2.6 统计方法

CT 图像反演系统一般都是非线性的, 通过对模型参数的一切可能进行计算并与测量值相比较, 即可得到最优化解, 这种方法就是穷举法, 但速度最慢。许多经典的算法, 如变尺度法、最速下降法、牛顿法、松弛法等, 都是在局域进行线性化求解, 但初始模型或初始值对计算结果的影响很大。介于两者之间的算法就是基于搜索的算法, 如传统蒙特卡罗法、模拟退火法、遗传算法和粒子滤波法等。

#### 2.6.1 传统蒙特卡罗算法 (Monte Carlo Method, MCM)<sup>[26-27]</sup>

MCM 在强吸收或强散射生物组织的图像反演中得到了广泛的应用。MCM 的实质是计算机模拟大量光子在浑浊介质中的吸收和散射过程, 如图 5 是用 MCM 模拟低能电子撞击氮化硅层与  $\text{SiO}_2$  衬底后的运动轨迹<sup>[28]</sup>。MCM 可以通过如下步骤来实现<sup>[29]</sup>:

(1) 在对象表面产生与光源空间及角度分布相符合的光子;

(2) 确定第一个散射点的位置、散射角和方位角, 以确定光子的轨迹;

$$L(\xi_1) = \frac{\ln(\xi_1)}{\eta\sigma_s}, \quad (33)$$

式中:  $1/\eta\sigma_s$  为光子的平均自由程,  $\xi_1$  ( $0 < \xi_1 < 1$ ) 为第 1 个随机数确定的第 1 个散射点的位置,  $\xi_2$  ( $0 < \xi_2 < 1$ ) 为第 2 个随机数 (如 Henyey-Greenstein 随机函数) 确定的散射角,  $\xi_3$  ( $0 < \xi_3 < 1$ ) 为第

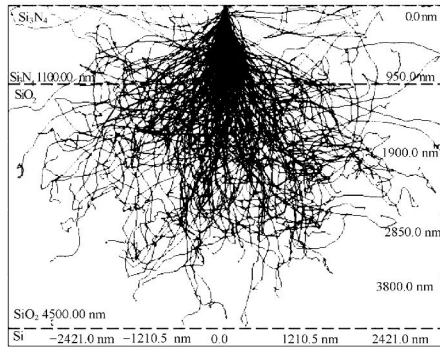


图 5 Monte Carlo 算法模拟 18 keV 电子撞击氮化硅层与 SiO<sub>2</sub> 衬底,蓝色曲线是电子不返回表面的运动轨迹,红色曲线是表面返回的电子轨迹<sup>[28]</sup>

Fig. 5 Monte Carlo simulation of 18 keV electrons striking a Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> layer with a SiO<sub>2</sub> substrate. The blue lines show the trajectories of the electrons which do not return to the surface and the red lines show the trajectories of the electrons which return to the surface<sup>[28]</sup>

3 个随机数确定的方位角,即  $\phi = 2\pi\xi_3$ 。

(3)吸收和散射的确定,以第 4 个随机数  $\xi_4$  ( $0 < \xi_4 < 1$ ) 来确定,若  $\xi_4 < \alpha$  则发生散射( $\alpha$  为漫反照率),若  $\xi_4 > \alpha$  则光子被吸收,初始权值为 1 的光子数由于吸收而减小  $\exp[-\beta L(\xi_1)]$ , $\beta$  为吸收系数。

(4)当光子终止于对象边界或小于某个阈值时,光子消失,跟踪结束,从头开始对新的光子进行跟踪。

MCM 适用于各种光源、探测器及复杂边界的物理量的选择灵活,对计算机的要求不高,但由于其是完全随机搜索,故收敛速度太慢,而采用并行计算可大大提高其速度。近年来,MCM 结合随机滤波理论和贝叶斯统计产生的粒子滤波理论发展迅速,由于其采用重要性采样和重采样的思想,具有更好的图像重建精度和速度<sup>[30-31]</sup>。

2.6.2 模拟退火法(Simulated Annealing,SA)

滑雪过程可以形象地描述 SA 模拟熔融金属的缓慢冷却过程<sup>[32]</sup>,如图 6 所示。由统计物理的理论,吉布斯分布(Gibbs)描述了系统处于状态 X、能量  $E(X)$  的概率  $P(X)$  :

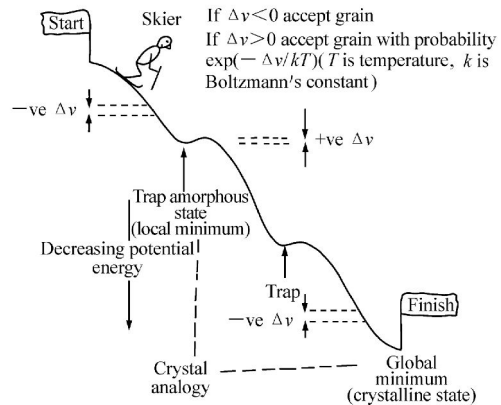


图 6 用滑雪比喻模拟退火法,滑雪的坡度代表成本函数,雪坑代表局部最优,完成标志代表全局最优,滑雪者偶尔需要滑雪上山或打隧道通过雪坑以免被陷在局部最优,模拟退火法来自于熔融金属的缓慢冷却过程,结晶代表全局最优,无定形态代表局部最优<sup>[32]</sup>

Fig. 6 An analogy for simulated annealing. The ski slope is the cost function. It has local minima (snowbumps) and a global minimum to be reached (finish flag). The skier has to occasionally ski uphill (or “tunnel through the snowbumps-”) in order to avoid becoming trapped in a local minimum. The technique gets its name from the slow cooling of a solution in which the crystalline state is the global minimum and local minima are amorphous states<sup>[32]</sup>

$$P(X) = \frac{1}{z} \exp\left[\frac{-E(X)}{K_B T}\right], \quad (34)$$

式中: $z$  为正规化常数, $K_B$  为 Boltzman 常数,上式表明,对于存在扰动的系统,温度  $T$  越小,向低能量状态变化的概率越大,系统在  $T$  趋于 0 时达到能量最小的热平衡状态,并生成晶体。

SA 以式(34)为模型,以  $E(P) = \|DP - T\|^2$  为目标函数,用等效于温度  $T$  的迭代控制参数不断修正  $P$  的值,使  $E(P)$  不断减小,从  $E(P_i)$  改变到  $E(P_i + \delta P_i)$  的概率为:

$$P = \begin{cases} \exp[-\Delta E \times P(K_B T)] & \Delta E \geq 0 \\ 1 & \Delta E < 0 \end{cases}, \quad (35)$$

式中, $\Delta E = E(P_i + \delta P_i) - E(P_i)$ 。当  $T \approx 0$  时体

系达到的最低能量状态即是全局最优解,其中退火温度  $T$  的选取是关键所在。Rothman 提出了以迭代次数  $k$  和初始温度  $T_0$  为变量的  $T$  的指数变化模式:

$$T(k) = 0.99^k T_0. \quad (36)$$

SA 与 MCM 的区别在于,SA 引入了先验知识作为随机搜索的引导,具有很强的解决复杂非线性问题的能力和广泛的适应性。自 1983 年 Kirkpatrick<sup>[33]</sup> 在 Science 杂志首次提出以来,SA 在计算机设计、地球物理、图像处理及人工智能等领域得到了广泛的应用,在层析成像的反演问题中也得到了应用<sup>[34]</sup>。

### 2.6.3 遗传算法 (Genetic Algorithm, GA)<sup>[35-37]</sup>

GA 是基于非导数优化的算法,是生命自然进化规律和工程最优化问题在数学上的结合,具有很强的适应性。GA 的主要优点在于其全局最优搜索和内在并行计算的能力,在工程中应用广泛,在电阻和光层析成像中也偶有应用,其算法如下:

(1) 编码方案:将所研究的参数空间转化为二进制编码来表示,以气/固二相流为例,研究对象是气/固二相物质分布。假设像素内为单一均匀媒质,若为不透光固体时规定为 0(光完全被阻挡),若为空气时为 1(光无任何衰减),对应于生物学中的基因;假设测量区域有  $m$  个像素,因此二进制串的位数为  $m$ ,对应于生物学中的染色体;为了应用 GA 的“进化”机制,规定  $n$  个二进制串作为一个集合,对应于生物学中的种群。

(2) 适应度计算:假设截面中有  $s$  条光线,因此  $m$  个像素的取值对应探测器接收到的  $s$  个光强值,在算法中体现为  $m$  位的二进制串对应  $s$  元素的一维向量,设此处适应度是计算和实际测量得到的一维向量的方差被  $m$ (方差的极大值)减去后的值。算法中共有两个地方对适应度进行计算,第一是对初始化矩阵进行计算,以作为“选择”的依据;第二是对完成“变异”操作后的矩阵进行计算,并将最大的适应度和对应的行向量存储下来,算法最后给出的适应度是所有适应度的最大值,对应于计算值和测量值方差的最小值。

(3) 选择:类似于自然选择中的适者生存,即种群中个体有一部分被淘汰,原矩阵中适应度最

小的  $t$  行将被随机产生的新的  $t$  行二进制编码取代。

(4) 交换:为了保留上代优良特征并产生新的染色体(二进制串)而交换种群中两个个体的染色体基因编码,此处选取矩阵中的  $p$  行(占矩阵行数的  $p$ ),每两行随机选取一定数目的位进行数据交换。

(5) 变异:其目的是通过对种群中某些个体的基因进行突变而达到优化的目的,此处选取矩阵中的  $q$  行(占矩阵行数的  $q$ ),对每行中的某一位进行二进制取反,位数随机产生。

上述步骤中的概率值需由实际情况决定,决定的过程需要反复利用算法尝试,以达到最佳值为止,这个过程也称之为“学习”的过程。

### 2.7 有限元法 (Finite Element Method, FEM)

FEM 来自于对解域进行离散处理的差分法、选择试探函数的里兹法和变分法<sup>[38]</sup>,其求解问题的基本步骤通常为:

(1) 根据实际情况确定求解域的物理性质和几何区域,如在光 CT 中光子在强散射生物介质中的传输行为由光子输运方程或其漫射来近似描述,而在电容 CT 中二维圆域的电势分布则用泊松方程描述<sup>[39]</sup>;被测对象所在区域就是几何区域,如二相流所在的管道或容器空间。

(2) 通过用泛函分析的变分方法描述解域的物理性质,从而将微分方程的求解转化为多元极值问题;以有限个形状和大小各异的单元划分解域空间,单元形状和大小分别由解域子空间的边界和物理性质而定,网格划分越细精度越高,但计算速度越慢,需综合考虑而有所取舍。

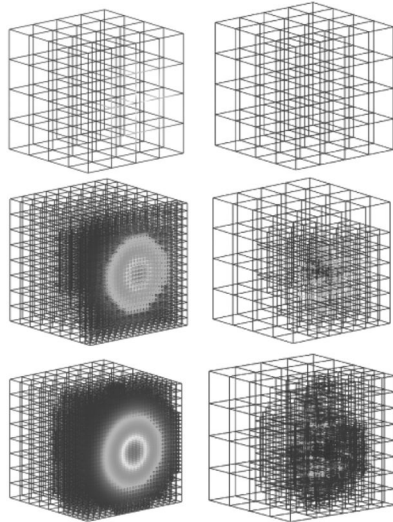
(3) 每一单元定义插值函数及边界条件,由于单元形状简单,所以容易满足边界条件,且用低阶多项式就可获得整个区域的适当精度。

(4) 整合所有单元方程及边界条件为联合方程组,并用相应的算法求解方程组,得到各单元节点处插值函数的近似值,引入评估标准以确定是否满足要求或进行重复计算。

图 7 是基于自适应有限元法的生物组织荧光层析成像在图像重建过程中的状态及参量离散化网格的演化图,随着迭代次数的增加,重建目标附近的网格数越来越密<sup>[40]</sup>。有限元法由于能够分



析复杂结构、处理复杂边界条件、并且可以通过增加网格数量提高计算精度,而成为目前最为有效、应用最广的计算机数值模拟手段之一,相信在 CT 领域也会得到更大的应用。



(a) 状态/伴随变量离散化网格演化图 (b) 参量离散化网格演化图  
(a) State/adjoint discretization (b) Parameter discretization

图 7 基于有限元方法的状态/伴随变量及参量离散化网格演化图,分别为 1 次、11 次及 22 次 Gauss-Newton 迭代<sup>[40]</sup>

Fig. 7 Adaptive mesh evolution based on the finite element method for state/adjoint and parameter discretization. Meshes are shown at 1st, 11th and 22nd Gauss-Newton iterations<sup>[40]</sup>

## 2.8 人工神经网络法 (Artificial Neural Network, ANN)<sup>[41-42]</sup>

ANN 借鉴生物神经网络构建大规模并行非线性系统,通过训练及归纳系统过去的的数据,使其具有处理新数据的能力,具有很强的自适应、耐故障及实时动态并行处理能力,是一种智能算法<sup>[43]</sup>。ANN 可以由超大规模集成电路硬件实现,使之成为 CT 图像重建中一种快速高准确度的处理方法。

如图 8 所示,ANN 一般为 3 层前向反馈网络,包括输入层  $T$  ( $n$  维列向量)、输出层  $P$  ( $m$  维列向量)和隐层<sup>[44]</sup>,其算法模型如下:

$$P = f(\omega T - \theta), \quad (37)$$

其中输入层一般为投影值,如光 CT 中的探测器

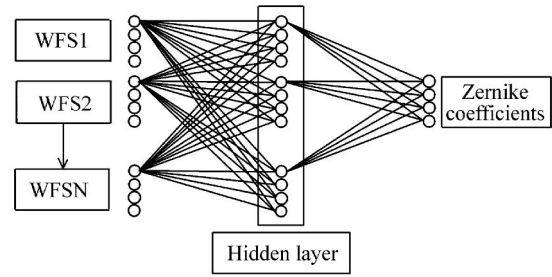


图 8 人工神经网络简化模型<sup>[44]</sup>,WFS:波前传感器

Fig. 8 A simplified network diagram for artificial neural network<sup>[44]</sup>, WFS: Wavefront Sensor

测量值等,输出层一般代表对象所测物理参数的像素的灰度值,如衰减系数等, $f$  为隐层激励函数,是 ANN 的核心,隐层激励函数可以是类支集函数,如 Delta 函数<sup>[45]</sup>、Gauss 函数<sup>[46]</sup>等,也可以是 Chebyshev 正交多项式<sup>[47]</sup>, $\omega$  为权值矩阵 ( $m \times n$  维), $\theta$  为隐层神经元阈值矩阵 ( $m$  维列向量), $\omega$  和  $\theta$  需要通过 ANN 的训练得到,训练方法最常见的一种称为有师学习的算法,即通过对仿真或经验得到的样本集中的样本输入到 ANN 模型,不断调整  $\omega$  和  $\theta$  的值,直到满足目标精度的要求,如反向传播 (BP) 算法。隐层神经元的个数需要根据实际情况选取,太多则训练时间长,太少则会带来误差。

## 2.9 小波多分辨分析法 (Wavelet Multi-resolution Analysis, WMRA)<sup>[48]</sup>

WMRA 在  $L^2(R)$  空间生成的嵌套、单调且逼近的  $\{V_j\}_{j \in Z}$  尺度空间序列的  $V_0$  子空间构建规范正交基  $\varphi_{j,k}(t)$ :

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad j, k \in Z, t \in R. \quad (38)$$

由于  $V_{j+1}$  子空间可表达为  $V_j$  子空间及其正交子空间  $\{W_j\}_{j \in Z}$  (小波空间) 的直和,即  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ ,推广开来  $L^2(R)$  可由  $W_j$  表达,即:  $L^2(R) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$ ,同样在  $W_0$  子空间可构建小波规范正交基,即:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - K) \quad j, k \in Z, t \in R. \quad (39)$$

因此,能量有限信号  $f(t)$  可在尺度及小波空间展开:

$$f(t) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} c_{j,k} \varphi_{j,k}(t) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (40)$$

尺度系数  $c$  和小波系数  $d$  分别为:

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} h_n c_{j+1, n+2k}, \quad (41)$$

$$d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} g_n c_{j+1, n+2k}. \quad (42)$$

WMRA 重构公式可表达为:

$$c_{j+1, n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k \check{c}_{j, n-2k} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k \check{d}_{j, n-2k}. \quad (43)$$

$$\check{P} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \vdots & h[0] & h[1] & h[2] & h[3] & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$\check{C}_j = (\cdots c_j[0] c_j[1] \cdots c_j[n-1] \cdots)^T, \quad (46)$$

$$c_{j+1}[k] = \sum_{n=0}^3 h[n] c_j[n+2k]. \quad (47)$$

Mallat 高通矩阵为:

$$\check{Q} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & g[0] & g[1] & g[2] & g[3] & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \vdots & g[0] & g[1] & g[2] & g[3] & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$\check{D}_j = (\cdots d_j[0] d_j[1] \cdots d_j[n-1] \cdots)^T. \quad (49)$$

上面几个公式中,  $h$  和  $g$  分别为 WMRA 双尺度方程的系数。

$$h_k = \langle \varphi(t), \varphi(2t-k) \rangle, \quad (50)$$

$$g_k = \langle \psi(t), \psi(2t-k) \rangle, \quad (51)$$

其中, 双尺度方程为:

$$\varphi(t) = \sum_k h_k \varphi(2t-k), \quad (52)$$

$$\psi(t) = \sum_k g_k \psi(2t-k). \quad (53)$$

频域双尺度方程可由上两式的 Fourier 变换得到, 其系数  $h(\omega)$  和  $g(\omega)$  分别代表低通和高通滤波器, 离散小波变换可借助于此滤波器实现, 由滤波器的共轭镜像特性:

$$|h(\omega)|^2 + |h(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (54)$$

因此, WMRA 像 Fourier 变换一样可以看成是对信号的系列分解, 上式右端的第一项代表信号的低频部分, 而第二项则代表高频部分, WMRA 一般用 Daubechies 小波基<sup>[49]</sup> 由 Mallat<sup>[50]</sup> 算法实现, 其低通分解公式为:

$$\check{C}_{j+1} = \check{P} \check{C}_j (j = 0, 1, \cdots, L-1), \quad (44)$$

式中:

$$|g(\omega)|^2 + |g(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (55)$$

$$h(\omega) \overline{g(\omega)} + h(\omega + \pi) \overline{g(\omega + \pi)} = 0, \quad (56)$$

可得:

$$g_k = (-1)^{1-k} h_{1-k}. \quad (57)$$

对于 CT 基本模型  $T = DP$  而言, 利用公式 (45) 和 (48) 可分别得到  $T$  和  $P$  的低通变换矩阵  $\check{P}T$  和  $\check{P}P$  及高通变换矩阵  $\check{Q}T$  和  $\check{Q}P$ , 利用分离小波变换技术, 定义  $Q_Y$  ( $n \times n$  维) 和  $Q_X$  ( $m \times m$  维), 分别为一维小波变换矩阵<sup>[51]</sup>,  $Q_Y$  和  $Q_X$  可分别由公式 (57) 和 (48) 得到, 由于  $db_2$  小波的正交性,  $Q_Y$  和  $Q_X$  都为正交矩阵, 即  $Q_Y Q_Y^T Y = Q_X Q_X^T X = I$ , 对方程  $T = DP$  两边同时左乘  $Q_Y$ , 并在右边

$DP$  之间插入  $Q_x^T Q_x$ , 得:

$$\hat{T} = \hat{D}\hat{P}, \quad (58)$$

式中:  $\hat{T} = Q_y T$ ,  $\hat{P} = Q_x P$ ,  $\hat{D} = Q_y D Q_x^T$ , 因此将奇异矩阵  $T = DP$  化为非奇异的等价的矩阵  $\hat{T} = \hat{D}\hat{P}$ , 求逆, 可得到  $\hat{P}$ ; 由于  $\hat{P}$  是  $P$  的小波变换, 利用逆小波变换就可求出  $P$ 。

WMRA 的发展基于 Fourier 变换, 传统的 Fourier 变换无法同时描述信号在时间和频率上的细节, 加窗 Fourier 变换无法随时间信号频率的不同来调节窗口, WMRA 则可以在时域和频域同时聚焦到信号的任意细节, 因此在 CT 领域得到越来越多的应用。

### 3 各种算法总结及讨论

#### 3.1 正向问题数学模型的简化

层析成像的图像重建算法需要根据正向问题所提出的物理模型及其边界条件来设计, 图像重建精度不仅仅取决于算法, 还与正向问题中的像素分配及像素单元大小有直接关系。像素单元小则重建图像的理论精度高, 但数据量大, 重建速度慢。虽然通过 Zernike 矩算子<sup>[52]</sup>可以实现亚像素边缘检测, 但更为普适、有效的方法是对正向问题模型中的像素进行再加工, 以便更好地适应重建要求。有限元法便是为以上描述量身打造的算法, 它对被测空间进行细分(划分为有限个形状和大小各异的单元), 将解域中复杂的物理问题转化为理论上可以达到任意精度的矩阵方程(由各单元方程和单元之间的边界条件方程构成, 计算精度与单元数直接相关)求解, 而求解的算法则依靠其他重建方法, 如直接法、迭代法或随机方法等。从这种意义上来看, 有限元法提供了一个普适、有效而精确的预处理手段, 使因为对象分布、光传输或场分布、传感器布局或扫描机制的复杂性而变得非常复杂的正向数学模型得到简化。

#### 3.2 反向问题数学模型的映射结构

层析成像图像重建的反向问题实质上是根据测量的投影值(或投影矩阵)求解被测空间各像素点物理特性(如密度矩阵)的过程, 图像重建算法就是横跨两者的一座桥梁。所不同的是, 有些

算法只是在此岸盲目地找一个起点, 然后依据一定的准则用试探的方法来构建, 如各种基于导数的迭代法和搜索方法(最速下降法、共轭梯度法、牛顿法等), 由于这些方法一般将复杂的非线性问题化为线性或局部线性的问题, 并对初始值(或初始模型)依赖较强, 就像建筑师不能根据实际地形及时调整局部构建方案, 对最终的目的地也不是很清楚, 将桥架在两岸中间小島上的情况也在所难免(即陷入了局部的最优解)。

为了尽可能避免上述情况的发生, 就必须熟悉地形, 并事先描绘大桥的蓝图, 即找到从投影到重建图像的基本规律, 依据规律设计算法, 这方面最早的建树是 Radon 于 1917 年提出的 Radon 变换法, 他证明了无限薄切片上的相关线性衰减系数唯一取决于所有线积分的集合, Radon 变换法的简化算法便是在 CT 中具有广泛应用的线性反投影算法(LBP), 但 LBP 完全忽略了空间各点的非线性特征, 使重建图像出现了严重的失真, 因此 LBP 只能作为一个定性的参考, 就好比建筑师虽然知道了大桥的大概走势, 但建造时却千篇一律全然不管每个局部的地形特征, 结果可想而知。LBP 的改进算法有最小二乘法、奇异值分解法等, 但这些基于变换的方法都涉及到对矩阵的求逆, 当数据量比较大的时候, 所耗费的时间就相当可观了, 另外, 由于是线性算法, 因此当波或场在媒质中不是沿直线传播或分布时, 这些方法也就无能为力了。

因此, 要想尽可能准确地反演, 就必须因地制宜尽可能地对治中途遇到的各种问题和困难, Radon 变换法(地形的基本走势)与卷积滤波(克服中途困难)的结合便产生了目前 CT 最流行的滤波反投影算法。该算法原理简单、图像生成快、效果好, 并且重建运算能独立于机械扫描过程; 另一种相关的算法就是二维 Fourier 变换法, 该方法找到了各方向投影的一维 Fourier 系数与图像的二维 Fourier 系数相等的规律, 与相应的滤波器相结合便形成了又一种流行的滤波反投影算法(Fourier 变换法), 而基于图及其反投影 Radon 变换的二维 Fourier 变换之间的关系, 又形成了第 3 种滤波反投影算法( $\rho$  滤波的分层图)。

由于 Fourier 变换本质的局限性,不能同时刻画时域(空域)和频域的细节特征,因此,上面两种基于 Fourier 变换的滤波算法效果还不是十分理想,就像有些医师只会用广普抗菌的药物治病而并不真正通达病情一样。不过,如果是一位医术高明的中医根据病人不同的脉象开不同的处方治疗,效果就会大不一样,从 Fourier 变换发展而来的小波分析法即是如此。由于嵌套的小波子空间覆盖了整个实数空间,因此理论上利用小波变换可以聚焦到信号在时域(空域)和频域上的任意细节,因而能够有效地从信号中提取有用信息,并且还可以针对已出现的具体噪声对重建后的图像进行滤波。另外,小波变换后的矩阵是稀疏的,迭代算法稳定而快速,有利于信号的实时处理,因此小波分析法有望在 CT 中得到广泛而重要的应用。

但是,上面提到的算法,仅仅是找到了从投影到重建的一般规律,并没有太多涉及中间的物理过程,好比大桥的桥墩已经设计好了,桥身则自然随着桥墩的方向建造,但却不能排除中间一些特殊的地形对整个建筑的影响(如媒质和光传输强烈的非线性效应等)。另一些算法则充分考虑了反演模型的物理本质,这些方法又分两种情况:一种是用精确理论(如麦克斯韦方程)及一定的近似并结合一定的数值方法求解,但该方法只能用于一些简单的边界情况;另一种方法是用漫射近似下的光输运方程,并结合完全随机的传统蒙特卡罗方法求解,适应于各种源和探测器的特性,并且可以用于复杂的介质边界。由于传统蒙特卡罗方法是对全局最优解的完全随机搜索,因此需要使用并行计算机算法以改进其收敛速度。

以上讨论表明:如果要快速、准确地得到层析成像反演问题的解,就必须对反向问题的投影结构及其中的物理过程有全面的了解,并预先对解的性质和特征(期望值)做出较为正确的判断,但 CT 涉及的领域非常广阔,反向问题的具体情况或具体的物理过程千差万别,在大多情况下,上述两点都是很难做到的。不过,反观自然界和生物界的许多系统,可以发现它们有着对非线性令人惊叹的处理能力,这些高度的自组织系统为包括 CT

在内的反演算法注入了新的活力,如本质上是内在并行计算的遗传算法借鉴了生命进化的规律,将复杂对象结构用简单编码技术表达,能从复杂问题中以很大概率找到全局最优解,而模拟退火法则借鉴了熔融金属缓慢冷却的规律,具有极强的全局搜索能力。

但上述两种算法仅仅是从反演问题的优化方法上对高度自组织的自然界系统进行模仿,神经网络法 ANN 则模仿生物神经网络的主要结构特点,为层析成像的反演问题构建了完整的映射结构,并且为其他算法建立了一个运行的平台,如利用遗传算法进行学习和训练等。ANN 本质上可变换任何非线性映射,通过训练还可以对系统的全部数据进行归纳,特别适合于用数学模型难以描述或解决的 CT 反演问题。另外,ANN 具有高度并行结构和并行处理能力,可以用超大规模集成电路在硬件上实现,特别适合于在线处理。对于一个复杂的、高度非线性的 CT 反演问题,ANN 的这些独特优点是其他算法无法比拟的。

#### 4 结束语

由于层析成像研究对象,所用物理机理及传感器分布的复杂性,决定了图像重建算法的复杂性和多样性,难以简单地评述某种算法的优劣。总体而言,根据反向问题数学模型的映射结构,各种基于变换的方法由于是线性算法而使重建图像具有严重的失真,结合卷积滤波可对其有所改善;迭代法由于以基于导数的搜索算法为核心,对初始值依赖性强、计算量大、收敛速度慢并且容易陷入局部的最优解;基于 Fourier 变换的方法由于其变换本质的局限性,大有被具有同时刻画时域和频域细节特征能力的小波变换所取代的趋势;有限元法可以对重建对象进行智能化像素划分以简化正问题的复杂性,可以与其它算法相结合使用。对于复杂且非线性的一般重建对象,以及电、磁、声、光等的软场特性,图像重建算法有向智能化、仿生化及并行化发展的趋势,如各种具有物理及生物背景的统计方法,蒙特卡罗法、模拟退火法、遗传算法、粒子滤波法、神经网络法等,各种算法

可以结合使用以取长补短,达到更好的图像重建目标。

### 参考文献:

- [1] HERMAN G T. *Image Reconstruction from Projections*[M]. New York:Academic Press,1980.
- [2] 傅鹂,刘石,杨五强.两相流测量中电容层析成像图像重建的广义逆最小模解与线性反投影和迭代法的比较[J].*仪器仪表学报*,2001,22(1):74-77.  
FU L,LIU SH,YANG W Q. Comparison of three image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography [J]. *Chinese J. Scientific Instrument*,2001,22(1):74-77. (in Chinese)
- [3] XIE C G,HUANG S M,HOYLE B S,*et al.* Electrical capacitance tomography for flow imaging: system model for development of image reconstruction algorithms and design of primary sensor[J]. *IEE Proceedings G*,1992,139(1):89-98.
- [4] KAUFMAN L. Maximum likelihood, squares, and penalized least squares for PET[J]. *IEEE T. Med. Imaging*,1993,12(2):200-214.
- [5] 刘斌,李术才,李树忱,等.基于不等式约束的最小二乘法三维电阻率反演及其算法优化[J].*地球物理学报*,2012,55(1):260-268.  
LIU B,LI SH C,LI SH C,*et al.*. 3D electrical resistivity inversion with least-squares method based on inequality constraint and its computation efficiency optimization[J]. *Chinese J. Geophysics*,2012,55(1):260-268. (in Chinese)
- [6] 蔡大用.高等数值分析[M].北京:清华大学出版社,1998.  
CAI D Y. *Advanced Numerical Analysis*[M]. Beijing:Tinghua University Press,1998. (in Chinese)
- [7] 陈宇,高宝庆,张立新,等.基于加权奇异值分解截断共轭梯度的电容层析图像重建[J].*光学精密工程*,2010,18(3):702-707.  
CHEN Y,GAO B Q,ZHANG L X,*et al.*. Image reconstruction based on weighted SVD truncation conjugate gradient algorithm for electrical capacitance tomography[J]. *Opt. Precision Eng.*,2010,18(3):702-707. (in Chinese)
- [8] VAUHKONEN M,VAD ASZ D,KARJALAINEN P A,*et al.*. Tikhonov regularization and prior information in electrical impedance tomography[J]. *IEEE T. Med. Imaging*,1998,17(2):285-293.
- [9] FREIBERGER M,CLASON C,SCHARFETTER H. Total variation regularization for nonlinear fluorescence tomography with an augmented Lagrangian splitting approach[J]. *Appl. Optics*,2010,49(19):3741-3747.
- [10] 王化祥,唐磊,闫勇.电容层析成像图像重建的总变差正则化算法[J].*仪器仪表学报*,2007,28(11):2014-2018.  
WANG H X,TANG L,YAN Y. Total variation regularization algorithm for electrical capacitance tomography[J]. *Chinese J. Scientific Instrument*,2007,28(11):2014-2018. (in Chinese)
- [11] PENGL H,M ERKUS H ,SCARLETT B. Using regularization methods to do image reconstruction of electrical capacitance tomography[J]. *Part Syst Charact*,2000,17(3):96-104.
- [12] LIU S,WANG H G,JIANG F,*et al.*. A new image reconstruction method for tomographic investigation of fluidized beds [J]. *AIChE J.*,2002,48(8):1631-1638.
- [13] 苏邦,张以恒,彭黎辉,等.同步迭代图像重建技术在电容层析成像系统中的应用[J].*清华大学学报(自然科学版)*,2000,40(9):90-92.  
SU B,ZHANG Y H,PENG L H,*et al.*. Simultaneous iterative reconstruction technique for electrical capacitance tomography[J]. *J Tsinghua University(Science and Technology)*,2000,40(9):90-92. (in Chinese)
- [14] 王小璞,张朋,李兴东,等.一种块迭代的快速代数重建算法[J].*CT理论与应用研究*,2000,9(增刊):10-12.  
WANG X P,ZHANG P,LI X D,*et al.*. A fast ART algorithm based on block iteration[J]. *Computerized Tomography Theory and Appl.*,2000,9(supp.):10-12. (in Chinese)
- [15] DAS R,MAHESH T S,KUMAR A. Efficient quantum-state tomography for quantum-information processing using a two-dimensional Fourier-transform technique[J]. *Physical Rev. A*,2003,67:062304.
- [16] JAM A K,AMSARI S. Radon transform theory for random fields and optimum image reconstruction from noisy projections [J]. *IEEE International Conference on I -CASSP'84*,1984,9:495-498.
- [17] LOHNER R. *Translation of Radon*[M]. Atlanta:Georgia Institute of Technology,1917.

- [18] 李世雄,林其彭,李嘉禹. 分区连续函数的 Radon 变换的高精度反演法[J]. 地球物理学报,1996,39(2):251-264.  
LI SH X, LIN Q P, LI J Y. High precision reconstruction methods for radon transform of piecewise smooth functions[J]. *Geophysics*, 1996, 39(2):251-264. (in Chinese)
- [19] 张进,王仲,李雅洁,等. 高精度影像测量系统中图像的超分辨率重建[J]. 光学精密工程,2011,19(1):168-174.  
ZHANG J, WANG ZH, LI Y J, *et al.*. Super-resolution reconstruction of image in high accuracy image measuring system [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2011, 19(1):168-174. (in Chinese)
- [20] 邓建青,刘晶红,刘铁军. 基于 DSP 系统的超分辨率图像重建技术研究[J]. 液晶与显示,2012,27(1):114-120.  
DENG J Q, LIU J H, LIU T J. Super-resolution image reconstruction technology based on dsp system[J]. *Chinese J. Liquid Crystals and Displays*, 2012, 27(1):114-120. (in Chinese)
- [21] 邓建青,刘晶红. 基于 Fourier-Mellin 变换和 Keren 算法的改进运动估计算法[J]. 液晶与显示,2011,26(3):364-369.  
DENG J Q, LIU J H. Improved motion estimation algorithm based on Fourier-Mellin transform and Keren algorithm[J]. *Chinese J. Liquid Crystals and Displays*, 2011, 26(3):364-369. (in Chinese)
- [22] 李志国. 基于特征点匹配的图像配准算法精度提升方法研究[J]. 光学与光电技术,2012,10(6):103-106.  
LI ZH G. Research on precision improvement method of image registration algorithm based on feature points matching [J]. *Opt. Optoelectronic Technology*, 2012, 10(6):103-106. (in Chinese)
- [23] 章东,龚秀芬.  $|\omega|$  滤波器对卷积滤波法进行非线性参量 B/A 成像的影响[J]. 声学学报,1995,20(4):271-279.  
ZHANG D, GONG X F. The influence of  $|\omega|$  filter function on nonlinear parameter imaging using filtered convolution method[J]. *Acta Acustica*, 1995, 20(4):271-279. (in Chinese)
- [24] RAMACHANDRAN G N, LAKSHMINARAYANAN A V. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transform[J]. *Proc. National Acadmy Sci.*, 1971, 68(9):2236-2240.
- [25] SHEPP L A, LOGAN B F. Reconstruction interior head tissue from X-ray transmissions[J]. *IEEE Trans, Nucl. Sci.*, 1974, 21(1):228-236.
- [26] 姚姚. 蒙特卡罗非线性反演方法及应用[M]. 北京:冶金工业出版社,1997.  
YAO Y. *Monte Carlo Nonlinear Inversion Method and Its Application* [M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 1997. (in Chinese)
- [27] FLOCK S T, PATTERSON M S, WILSON B C, *et al.*. Monte Carlo modeling of light propagation in highly scattering tissues-I: model predictions and comparison with diffusion theory[J]. *IEEE T. Bio-Med. Eng.*, 1989, 36(12):1162-1168.
- [28] WALKER C, GOMATI M E. Monte carlo simulations of low energy electrons in solids. [http://www.elec.york.ac.uk/research/projects/Monte\\_Carlo\\_simulations\\_of\\_low\\_energy\\_electrons\\_in\\_solids.html](http://www.elec.york.ac.uk/research/projects/Monte_Carlo_simulations_of_low_energy_electrons_in_solids.html), 2006.
- [29] NIEMZ M H. 激光与生物组织的相互作用:原理及应用[M]. 西安:西安交通大学出版社,1999.  
NIEMZ M H. *Laser-tissue interactions: Principles and Applications* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1999. (in Chinese)
- [30] 吴新杰,黄国兴,王静文. 粒子滤波算法在 ECT 图像重建中的应用[J]. 光学精密工程,2012,20(8):1824-1830.  
WU X J, HUANG G X, WANG J W. Application of particle filtering algorithm to image reconstruction of ECT[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2012, 20(8):1824-1830. (in Chinese)
- [31] 李军科,张串,吴建军. 基于蒙特卡洛方法的粒子滤波算法研究[J]. 电脑与信息技术,2008,16(1):49-53.  
LI J K, ZHANG C, WU J J. Study of particle filter algorithm based on Monte Carlo methods[J]. *Computer and Information Technology*, 2008, 16(1):49-53. (in Chinese)
- [32] WEBB S. The physical basis of IMRT and inverse planning[J]. *The British J. Radiology*, 2003, 76:678-689.
- [33] KIRKPATRICK S, GELATT C D, VECCHI M P. Optimization by simulated annealing[J]. *Science*, 1983, 220(4598):671-680.
- [34] BLACKOWIAK A D AND RAJAN S D. Multi-Path arrival estimates using simulated annealing: application to crosshole tomography experiment[J]. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 1995, 20(3):157-165.

- [35] 王芳,陈生昌.解非线性反演问题的新策略[J].石油物探,1999,38(3):76-84.  
WANG F, CHEN SH CH. New strategy to solve nonlinear inverse problem[J]. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 1999,38(3):76-84. (in Chinese)
- [36] 阎春生.光纤过程层析成像技术研究[D].北京:清华大学电子工程系,2003.  
YAN CH SH. Study on optical fiber process tomography[D]. Beijing:Department of Electronic Engineering, Tsinghua University,2003. (in Chinese)
- [37] SHI C Z, CHAN C C, JIN W. Improving the performance of a FBG sensor network using a genetic algorithm[J]. *Sens. Actuators A*, 2003,107:57-61.
- [38] 杜平安,甘娥忠,于亚婷.有限元法-原理、建模及应用[M].北京:国防工业出版社,2004.  
DU P A, GAN E ZH, YU Y T. *Finite Element Method-principle, Modeling and Application*[M]. Beijing:National Defense Industry Press,2004. (in Chinese)
- [39] 肖化,严杰,保宗悌.有限元在电容层析中的应用研究[J].应用科学学报,1998,16(2):171-175.  
XIAO H, YAN J, BAO Z T. Application research of finite element in electrical capacitance tomography[J]. *J. Appl. Sciences*, 1998,16(2):171-175. (in Chinese)
- [40] JOSHI A, BANGERTH W, SEVICK-MURACA E M. Adaptive finite element based tomography for fluorescence optical imaging in tissue[J]. *Opt. Express*, 2004,12(22):5402-5417.
- [41] 蔡自兴,徐光佑.人工智能及其应用[M].3版.北京:清华大学出版社,2004.  
CAI Z X, XU G Y. *Artificial Intelligence and Its Application*[M]. 3rd ed. Beijing:Tsinghua University Press,2004. (in Chinese)
- [42] 李扬,汪仁煌,郑莹娜.用线性神经网络映射光学过程层析成像的逆问题[J].中国图像图形学报,2003,8(7):738-743.  
LI Y, WANG R H, ZHENG Y N. Inverse problem of optic process tomography solved by using linear neural networks[J]. *J. Image and Graphics*, 2003,8(7):738-743. (in Chinese)
- [43] 宋建中.图像处理智能化的发展趋势[J].中国光学,2011,4(5):431-440.  
SONG J ZH. Development trend of image processing intelligence[J]. *Chinese Optics*, 2011,4(5):431-440. (in Chinese)
- [44] OSBORN J, JUEZ F J D C, GUZMAN D, et al. Using artificial neural networks for open-loop tomography[J]. *Opt. Express*, 2012,20(3):2420-34.
- [45] 李岩,冯莉,朱艳丹,等.类支集神经网络在ECT图像重建中的研究与应用[J].计算机工程与应用,2011,47(25):205-211.  
LI Y, FENG L, ZHU Y D, et al. Image reconstruction algorithm based on NSSN for Electrical Capacitance Tomography [J]. *Computer Eng. Appl.*, 2011,47(25):205-211. (in Chinese)
- [46] 张彦俊,陈德运.代数神经网络电阻层析成像图像重建算法[J].计算机工程与应用,2009,45(32):19-21.  
ZHANG Y J, CHEN D Y. Algebraic neural network image reconstruction algorithm for electrical resistance tomography [J]. *Computer Eng. and Appl.*, 2009,45(32):19-21. (in Chinese)
- [47] 李岩,曹帅,冯莉,等. Chebyshev神经网络在ECT图像重建中的研究与应用[J].计算机工程与应用,2011,47(32):198-200.  
LI Y, CAO SH, FENG L, et al. Research and application of image reconstruction algorithm based on Chebyshev for ECT [J]. *Computer Eng. Appl.*, 2011,47(32):198-200. (in Chinese)
- [48] 唐远炎,王玲.小波分析与文本文字识别[M].北京:科学出版社,2004.  
TANG Y Y, WANG L. *Wavelet Analysis and Text Character Recognition*[M]. Beijing:Science Press,2004. (in Chinese)
- [49] DAUBECHIES I. *Ten Lectures on Wavelets*[M]. Philadelphia:Society for Industrial and Applied Mathematics,1992.
- [50] MALLAT S G. A theory of multiresolution signal decomposition;the wavelet representation[J]. *IEEE Trans Pattern Anal. Machine Intel*, 1989,11(7):674-693.
- [51] ZHU W W, WANG Y, DENG Y N, et al. A wavelet-based multiresolution regularized least squares reconstruction approach for optical tomography[J]. *IEEE T. Med. Imaging*, 1997,16(2):210-217.

[52] 陶李,王珏,邹永宁,等.改进的 Zernike 矩工业 CT 图像边缘检测[J].中国光学,2012,5(1):48-56.

DAO L, WANG J, ZOU Y N, *et al.*. Improved Zernike moment method for industrial CT image edge detection[J]. *Chinese Optics*, 2012, 5(1): 48-56. (in Chinese)

#### 作者简介:



阎春生(1973—),男,山西文水人,博士,副教授,硕士生导师,1994年、1999年于电子科技大学分别获得学士、硕士学位,2003年于清华大学获得博士学位,主要从事光传感、光层析成像技术及近场光学等方面的研究。E-mail: yancs@zju.edu.cn



田 芊(1946—),男,江苏南通人,教授,博士生导师,1970年于清华大学获得学士学位,主要从事激光技术、光纤传感技术、近场光学等方面的研究。E-mail: tianq@mail.tsinghua.edu.cn



廖延彪(1935—),男,江西人,硕士,教授,博士生导师,1957年于武汉大学获得硕士学位,主要从事光纤传感方面的研究。E-mail: lyb-dee@mail.tsinghua.edu.cn

## 《光学 精密工程》(月刊)

- 中国光学开拓者之一王大珩院士亲自创办的新中国历史最悠久的光学期刊
- 现任主编为国家级有突出贡献的青年科学家曹健林博士
- Benjamin J Eggleton, John Love 等国际著名光学专家为本刊国际编委

《光学 精密工程》主要栏目有现代应用光学(空间光学、纤维光学、信息光学、薄膜光学、光电技术及器件、光学工艺及设备、光电跟踪与测量、激光技术及设备);微纳技术与精密机械(纳米光学、精密机械);信息科学(图像处理、计算机应用与软件工程)等。

- \* 美国工程索引 EI 核心期刊
- \* 中国精品科技期刊
- \* 中文核心期刊
- \* 百种中国杰出学术期刊

主管单位:中国科学院

主办单位:中国科学院长春光学精密机械与物理研究所

中国仪器仪表学会

地址:长春市东南湖大路 3888 号

邮编:130033

电话:0431-86176855

传真:0431-84613409

电邮:gxjmgc@sina.com

网址:http://www.eope.net

定价:50.00 元/册