

# 空间引力波探测任务的入轨误差分析

李卓<sup>1,2</sup>, 王有亮<sup>1</sup>, 郑建华<sup>1,2</sup>, 李明涛<sup>1,2\*</sup>

(1. 中国科学院 国家空间科学中心, 北京 100190;

2. 中国科学院大学, 北京 100039)

**摘要:**空间引力波探测任务要求构型在长达几年的工作过程中保持高水平稳定,而入轨误差可能会破坏构型的稳定性。因此本文研究了入轨误差对构型的影响。首先,分别用 Monte-Carlo 法和协方差分析函数描述法(Covariance Analysis Description Equation Technique, CADET)进行对照实验,验证了 CADET 法的正确性。运用 CADET 法分别研究了位置速度误差大小和方向对构型的影响。实验结果表明:CADET 法具有计算效率高的优点,并且相对误差不超过 6%;径向位置误差和切向速度误差对构型影响显著;当编队卫星位置和速度误差相对方向相同时对构型的影响更小;两种误差同时存在时,当位置误差不超过 160 km,速度误差不超过 3 cm/s 时构型可维持稳定。CADET 法准确有效且高速,适用于空间引力波探测任务的入轨误差分析。

**关键词:**空间引力波探测任务;入轨误差;构型稳定性;CADET 法

**中图分类号:**V11 **文献标识码:**A **doi:**10.3788/CO.20191203.0493

## Injection error analysis of space gravitational wave detection

LI Zhuo<sup>1,2</sup>, WANG You-liang<sup>1</sup>, ZHENG Jian-hua<sup>1,2</sup>, LI Ming-tao<sup>1,2\*</sup>

(1. National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

\* Corresponding author, E-mail: limingtao@nssc.ac.cn

**Abstract:** In order to analyze the effect of injection error on gravitational wave detection, and keep arm length, breathing angle, arm length variation rate and distance to earth acceptable, the effect of injection error is investigated. First, the Monte-Carlo and CADET are tested and compared. CADET is proved to be correct. The effects of position and velocity error on constellations are researched with the CADET method. Experimental results indicate that the relative error between CADET and Monte-Carlo is less than 6%, and the calculated

收稿日期:2019-02-01;修订日期:2019-04-01

基金项目:中国科学院战略性先导科技专项(No. XDA15014901)

Supported by the Strategy Priority Research Program of the Chinese Academy of Sciences(No. XDA15014901)

time of CADET is less than 1 min. Radial position error and tangential velocity error have a greater effect on constellation. If the position error of the three satellites are in same direction, maintaining stability is easier. The same is true for velocity error. A constellation can remain stable when position error is no more than 160 km and velocity error is no more than 3 cm/s. CADET is appropriate for injection error analysis because of its accuracy and high efficiency.

**Key words:** gravitational wave observatory; injection error; constellation stability; CADET

## 1 引言

2016 年,美国地基激光干涉引力波天文台(LIGO)第一次完成地面引力波信号探测,检验了广义相对论的正确性,也预示人类可以通过引力波探测来认识宇宙结构和天体的演化。为了扩展引力波探测频段,对 0.01 mHz ~ 1 Hz 左右中低频引力波进行探测,需要开展空间引力波探测活动。空间引力波探测任务具有更宽广的视野和大量的波源,涉及的关键技术包括无拖曳控制,高精度激光测距,微推进技术,大尺度高稳定编队构型设计等<sup>[1]</sup>。

20 世纪 90 年代开始美国国家航空航天局(NASA)和欧洲航天局(ESA)共同提出了空间激光干涉引力波探测项目 LISA(Laser Interferometer Space Antenna),旨在观测由超大质量黑洞合并和由中子星或黑洞组成的双星系统所产生的引力波<sup>[2]</sup>。LISA 任务包括 3 个航天器,在地球轨道后方 20°左右位置共同构成臂长为  $2.5 \times 10^6$  的等边三角形。利用空间自由悬浮测试质量块作为传感器,将引力波信号转化为测试质量块间距变化的信号,也是干涉仪臂长的变化<sup>[3]</sup>。

中国科学家也提出了类似的引力波探测项目,其中包括太极计划和天琴计划。太极计划由位于等边三角形顶端的三颗卫星组成,旨在探测中低频波段的引力波。太极计划的主要科学目标是观测双黑洞并合和极大质量比天体并合时产生的引力波辐射,以及其它的宇宙引力波辐射过程<sup>[1]</sup>。中山大学也提出了天琴计划,天琴计划在距地球  $10^5$  km 的近圆轨道内放置三颗航天器形成等边三角形,来验证引力波在中低频的存在和地球重力测量等其他观测内容<sup>[4-5]</sup>。

空间引力波探测通常会维持四年以上任务周期,由于初始入轨误差等不确定扰动的存在,使构型发生变化,可能导致其不再满足任务要求。因此需要对误差传播进行分析。已知常用的方法有 Monte-Carlo 法,通过抽样实验统计状态量的均值和标准差。Monte-Carlo 法原理简单,对各种误差普遍适用,然而为得到准确值需要进行多次抽样,当任务周期长时,计算量大,耗时长。

对于非线性误差传播分析问题,可以运用协方差分析方法,混沌多项式展开法,状态转移张量法,微分代数方程法,高斯混合模型法,解 Fokker-Plank 方程等方法解决<sup>[6]</sup>,工程实际中非线性误差通常符合正态分布形式,需要根据实际情况选择合适的方法。线性协方差方法多用于分析动力学模型为线性函数的轨道预报、交会、转移等问题,可快速获得误差传播结果<sup>[7]</sup>。已有的研究结果可以解决线性模型下的空间引力波探测误差传播问题<sup>[8]</sup>,对于非线性模型,可用协方差分析描述函数法(CADET)解决。CADET 法对非线性函数进行统计线性化,然后通过积分计算状态变量的均值和协方差矩阵。不同于 Monte-Carlo 法的耗时长和线性协方差法的精度低,CADET 方法计算速度快且精度高,适用于空间引力波探测轨道误差分析问题。

本文运用 CADET 方法分析了空间引力波探测任务构型在入轨误差下的稳定性,并研究了位置误差和速度误差的大小和方向对构型稳定性的影响。

## 2 空间引力波探测任务动力学模型

选取 J2000 日心惯性坐标系作为参考坐标系,航天器受到太阳引力及其他天体的摄动力。

卫星在空间运动中主要受太阳引力及水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星和冥王星的摄动力作用。以 LISA 为例,对于相同初始条件,考虑以上所有力的作用时,其臂长变化约为  $2.9 \times 10^5$  km,当去掉金星、地球、木星的作用时,臂长变化分别变为  $2.4 \times 10^5$  km,  $2.0 \times 10^5$  km,  $2.7 \times 10^5$  km;而去掉其他天体作用时臂长变化仍然保持在  $2.9 \times 10^5$  km 左右。因此为简化模型,只考虑金星、地球、木星的摄动力<sup>[8]</sup>。空间引力波探测任务动力学模型表示为<sup>[9]</sup>:

$$\ddot{\mathbf{R}}_k = -\mu_0 \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3} - \sum_{i=1}^3 \mu_i \left( \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} + \frac{\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i|^3} \right), \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{R}_k$  表示三颗卫星的位置矢量,  $k=1,2,3$ 。  $\mathbf{R}_i$  表示金星、地球和木星的位置矢量,  $i=1,2,3$ 。  $\mu_0$  表示太阳引力常数,  $\mu_i$  分别表示金星、地球和木星的引力常数,  $i=1,2,3$ 。

定义  $\mathbf{R}_{ij}(t) = \mathbf{R}_j(t) - \mathbf{R}_i(t)$ , ( $ij=12,23,31$ ) 为卫星之间的相对位置矢量。卫星编队动力学指标分别为臂长  $L$ , 呼吸角  $\theta$ , 臂长变化率  $V$ , 星地距离  $D$ , 可用公式(2)~(5)表达。

$$L_{ij}(t) = \|\mathbf{R}_{ij}(t)\|, \quad (2)$$

$$\theta_j(t) = \arccos\left(\frac{\mathbf{R}_{ij}(t) \cdot \mathbf{R}_{jk}(t)}{L_{ij}(t) \cdot L_{jk}(t)}\right), \quad (3)$$

$$V_{ij}(t) = \dot{L}_{ij}(t), \quad (4)$$

$$D(t) = \|\mathbf{R}_e(t) - \mathbf{R}_c(t)\|, \quad (5)$$

其中:  $\mathbf{R}_e$  是地球位置矢量,  $\mathbf{R}_c$  是三卫星中心位置矢量。

### 3 CADET 在空间引力波探测任务轨道误差分析中的应用

若  $\mathbf{x}(t)$  是系统状态向量;  $\mathbf{F}(t)$  是系统状态矩阵, 无过程扰动的线性连续随机系统微分方程是:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t), \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{x}(t)$  由均值  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  和随机分量  $\delta\mathbf{x}(t)$  组成,  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  和协方差矩阵  $\mathbf{p}(t)$  的公式为:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = E[\mathbf{x}(t)], \quad (7)$$

$$\mathbf{p}(t) = E[\delta\mathbf{x}(t)\delta\mathbf{x}^T(t)], \quad (8)$$

对  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  和  $\mathbf{p}(t)$  求导可得均值与协方差的传播方程<sup>[10]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}(t)\bar{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t)\mathbf{F}^T(t) \end{cases}, \quad (9)$$

根据第二节, 本文的动力学模型是非线性系统, 可以表示为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{x}(t)$  是方程的状态变量,  $x_1 \sim x_{18}$  为卫星 1, 2, 3 的位置速度;  $x_{19} \sim x_{21}$  为臂长,  $x_{22} \sim x_{24}$  为呼吸角,  $x_{25} \sim x_{27}$  为臂长变化率;  $x_{28}$  为星地距离。运用 CADET 方法分析入轨误差对空间引力波探测任务的影响, 需对系统进行统计线性化。

统计线性化需要构造误差函数  $e = f - \hat{f} - Nr$  并使其最小, 其中  $\hat{f}$  和  $N$  是描述函数。可得系统状态均值和协方差的传播公式<sup>[10-11]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t)\mathbf{N}^T(t) \end{cases}. \quad (11)$$

对于本问题, 状态变量  $x(t)$  符合正态分布, 因此可用下式求描述函数  $\hat{f}$  和  $N$ <sup>[10-11]</sup>:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}}(t) = E[f(\mathbf{x}, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ \mathbf{N}(t) = E[f(\mathbf{x}, t)\delta\mathbf{x}^T(t)] = \frac{d\hat{\mathbf{f}}}{d\bar{\mathbf{x}}} \end{cases}. \quad (12)$$

式(12)的计算比较复杂, 工程中常常用如下方法简化:

设状态矢量  $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_k]^T$  的均值是  $\mathbf{m} = [m_1 \cdots m_k]^T$ , 各状态变量间的协方差矩阵是<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{p} = E[\delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}^T] = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}.$$

已知  $f(x)$  关于  $x$  一阶可微, 在  $m$  进行  $f(x)$  的一阶泰勒展开, 得

$$f(x) = f(m) + \frac{\partial f}{\partial m_1}(x_1 - m_1) + \frac{\partial f}{\partial m_2}(x_2 - m_2) + \dots + R_1(x), \quad (13)$$

忽略一阶泰勒余项  $R_1(x)$ , 求式 (13) 期望值,  $f(x)$  的线性化形式是

$$\hat{f}(x) = f(m), \quad (14)$$

动力学方程的描述函数  $N$  为<sup>[12]</sup>

$$N = \frac{\partial \hat{f}(m)}{\partial m} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{n} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{I}$  为  $28 \times 28$  的单位矩阵,  $\mathbf{n}$  为

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{28}}{\partial m_1} & \dots & \frac{\partial f_{28}}{\partial m_k} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

式中,  $f_1$  至  $f_{28}$  包括下列方程:  $f_1$  至  $f_{18}$  为卫星 1, 2, 3 的位置速度;  $f_{19}$  至  $f_{21}$  为臂长  $L_{12}, L_{13}, L_{23}$ ;  $f_{22}$  至  $f_{24}$  为呼吸角  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ;  $f_{25}$  至  $f_{27}$  为臂长变化率  $V_{12}, V_{13}, V_{23}$ ;  $f_{28}$  为星地距离  $D$ 。

$\mathbf{n}$  的具体形式是

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{v1} & & \\ & \mathbf{M}_{v2} & \\ & & \mathbf{M}_{v3} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_{v_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \frac{\partial v_i}{\partial r_i} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中,  $v_i$  是卫星  $i (i = 1, 2, 3)$  的速度,  $\frac{\partial v_i}{\partial r_i}$  是卫星

$i (i = 1, 2, 3)$  的速度对位置的偏导。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{L}_{ij}}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{L}_{ij}}{\partial v_1} & \frac{\partial \dot{L}_{ij}}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{L}_{ij}}{\partial v_2} & \frac{\partial \dot{L}_{ij}}{\partial r_3} & \frac{\partial \dot{L}_{ij}}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial v_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial v_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial r_3} & \frac{\partial \dot{\theta}_{ij}}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \dot{V}_{ij}}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{V}_{ij}}{\partial v_1} & \frac{\partial \dot{V}_{ij}}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{V}_{ij}}{\partial v_2} & \frac{\partial \dot{V}_{ij}}{\partial r_3} & \frac{\partial \dot{V}_{ij}}{\partial v_3} \\ \frac{\partial \dot{D}}{\partial r_1} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial v_1} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial r_2} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial v_2} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial r_3} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial v_3} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial r_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial x_k} & \frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial y_k} & \frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial z_k} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial v_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial v_{xk}} & \frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial v_{yk}} & \frac{\partial \dot{K}_{ij}}{\partial v_{zk}} \end{bmatrix}$$

其中:  $K$  包括臂长  $L$ 、呼吸角  $\theta$ 、臂长变化率  $V$  和星地距离  $D$ , 其中  $ij = 12, 13, 23, k = 1, 2, 3$ 。

根据 CADET 方法知, 具有初始误差, 空间引力波探测任务航天器在 J2000 日心惯性坐标系中的状态均值与协方差的微分方程如下<sup>[11]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{m}}(t) = \hat{\mathbf{f}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t)\mathbf{N}^T(t) \end{cases}, \quad (22)$$

其中, 初始条件  $m_0$  包括三卫星初始位置速度和臂长、呼吸角、臂长变化率和星地距离,  $\mathbf{p}_0$  为对角线矩阵, 数值由三卫星初始位置和速度误差决定,  $\mathbf{N}(t)$  由式 (15) ~ (21) 求出。根据以上条件, 可通过积分求出任意时刻的均值和协方差矩阵。

### 4 CADET 仿真验证

基于动力学模型, 以任务周期内一直满足指标要求为标准选择合适的位置速度初始条件, 并加入正态分布误差。分别用 CADET 法和 Monte-Carlo 法求任务周期 10 年内构型的臂长, 呼吸角, 臂长变化率和星地距离的均值和标准差。

图 1 给出了 CADET 法和 Monte-Carlo 法求出

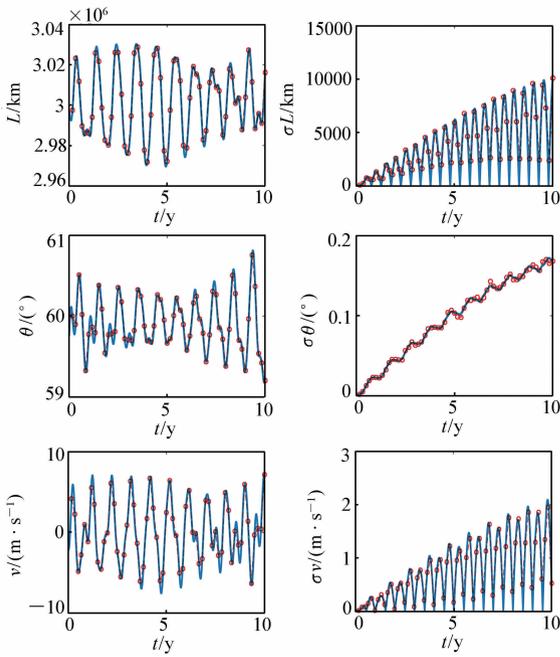


图1 CADET法和 Monte-Carlo 法的对照结果

Fig.1 Comparison diagrams of CADET and Monte-Carlo

的均值和标准差随时间变化的结果。其中圆圈为 Monte-Carlo 法抽样仿真 1 000 次结果,实线为 CADET 法结果。由图 1 可知,两种方法结果一致,以 Monte-Carlo 法的仿真结果作为标准,可以认为 CADET 法是有效的。

任务过程中将产生大量数据,所以选取一个特殊点(10 年周期内的最后时刻的数据)进行分析。考虑初始误差时 CADET 法和 Monte-Carlo 法均值、标准差误差和相对误差如表 1 所示。

由表 1 可知,臂长均值相对误差不超过 0.017 8%,标准差相对误差不超过 5.600 4%;呼吸角均值相对误差不超过 0.014 5%,标准差相对误差不超过 4.780 2%;臂长变化率均值相对误差不超过 1.633 6%,标准差相对误差不超过 5.339 7%;星地距离均值相对误差不超过 0.028 8%,标准差相对误差不超过 2.833 7%。说明 CADET 方法对于空间引力波探测误差分析问题确实准确有效。

表 1 CADET 法和 Monte-Carlo 法结果比较

Tab.1 Results comparison of CADET and Monte-Carlo methods

		$L_{12}/\text{km}$	$L_{13}/\text{km}$	$L_{23}/\text{km}$	$\theta_1/(\text{°})$	$\theta_2/(\text{°})$	$\theta_3/(\text{°})$	$v_{12}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{13}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{23}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
均值	MC	3 016 317.792 1	3 021 446.315 6	2 982 485.042 0	59.204 0	60.483 7	60.312 1	7.168 2	-3.707 0	4.349 5
	CADET	3 015 780.761 7	3 020 993.339 8	2 981 955.221 9	59.205 8	60.490 7	60.303 4	7.147 0	-3.699 5	4.278 4
标准差	MC	10 089.131 3	7 639.225 8	2 603.269 3	0.168 1	0.182 8	0.176 9	0.525 3	1.460 3	2.142 0
	CADET	9 897.729 5	7 600.800 5	2 457.476 2	0.168 8	0.174 0	0.170 2	0.529 8	1.444 2	2.027 6

## 5 基于 CADET 的空间引力波探测轨道误差传播分析

在空间引力波探测任务过程中,航天器面临的入轨误差是不确定的,不同的入轨误差会对构型产生不同程度的影响。当使用 Monte-Carlo 法分析入轨误差对构型影响的不确定性时,需要多次抽样保证结果的可靠性,因此解决问题的过程将花费大量时间。现在已知 CADET 方法对于空间引力波探测误差分析问题准确有效,可以运用

CADET 方法进行误差传播分析。

航天器的入轨误差主要分为位置误差和速度误差,下面将对这两类误差对构型指标产生的影响进行分析。以空间引力波探测任务为例,臂长要求为  $3 \times 10^6$  km,呼吸角变化小于  $1^\circ$ ,臂长变化率小于 10 m/s,星地距离小于  $6.5 \times 10^7$  km 时可认为构型满足空间引力波探测任务要求。初始构型如图 2 所示,1、2、3 曲线分别代表卫星 1、2,卫星 1、3,卫星 2、3 之间的指标变化情况,其中臂长最大值为  $3.014 \times 10^6$  km,呼吸角最大值为  $60.37^\circ$ ,臂长变化率最大值为 3.325 m/s,标准差均为 0。

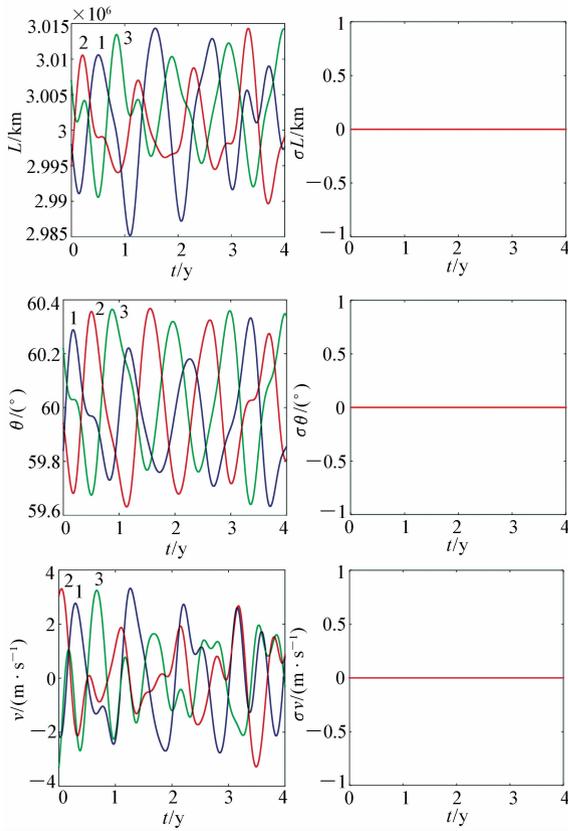


图 2 初始构型

Fig. 2 Initial constellations

5.1 误差方向对构型的影响

(1) 不同方向的位置误差

首先说明本文误差设置的方法,令误差符合正态分布  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma = \frac{1}{3}\mu$ 。以任务周期 4 年为例,同时向卫星 1, 2, 3 增加均值为 100 km, 方向分别沿径向,切向和法向的正态分布的位置误差。任务过程中各指标均值和标准差的最大值可以表现构型的发散程度,因此将其作为衡量构型变化的代表,以下表格相同。构型变化如表 2 所示。

当同时向 3 颗卫星增加大小相等的位置误差时,误差的方向对构型产生显著影响。径向误差使构型标准差产生的变化远大于其他两个方向的误差。径向位置误差增加了卫星的势能,所以构型产生的扰动更大。因此,航天器发射时需优先考虑减小径向位置误差。

(2) 不同方向的速度误差

同时向卫星 1, 2, 3 增加均值为 1 cm/s, 方向分别沿径向,切向和法向的正态分布的速度误差,构型变化如表 3 所示。

当同时向 3 颗卫星增加大小相等的速度误差

表 2 位置误差方向对构型的影响

Tab. 2 Effect of position error direction on constellation

		$L_{12}/\text{km}$	$L_{13}/\text{km}$	$L_{23}/\text{km}$	$\theta_1/(\text{°})$	$\theta_2/(\text{°})$	$\theta_3/(\text{°})$	$v_{12}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{13}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{23}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
径向	均值	3 014 428.590 4	3 014 411.924 5	3 014 041.631 1	60.328 4	60.365 1	60.369 2	3.334 9	3.260 2	3.307 2
	标准差	3 117.635 1	3 413.799 0	3 306.621 0	0.055 8	0.056 6	0.055 9	0.653 4	0.635 7	0.670 9
切向	均值	3 014 324.06 47	3 014 310.481 6	3 014 323.441 0	60.333 3	60.364 9	60.367 4	3.321 5	3.254 7	3.307 3
	标准差	91.243 0	91.886 3	72.738 5	0.001 5	0.001 5	0.001 5	0.021 6	0.021 5	0.019 6
法向	均值	3 014 354.154 6	3 014 250.519 3	3 014 323.744 1	60.332 7	60.364 6	60.367 8	3.325 2	3.252 1	3.307 3
	标准差	30.993 0	30.414 5	40.810 0	0.000 6	0.000 6	0.000 6	0.015 0	0.015 2	0.008 2

表 3 速度误差方向对构型的影响

Tab. 3 Effect of velocity error direction on constellation

		$L_{12}/\text{km}$	$L_{13}/\text{km}$	$L_{23}/\text{km}$	$\theta_1/(\text{°})$	$\theta_2/(\text{°})$	$\theta_3/(\text{°})$	$v_{12}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{13}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{23}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
径向	均值	3 014 364.693 7	3 014 218.896 0	3 014 324.092 7	60.332 4	60.364 5	60.368 0	3.326 2	3.250 8	3.307 2
	标准差	90.319 9	90.119 2	57.271 8	0.001 5	0.001 5	0.001 5	0.016 8	0.016 7	0.018 7
切向	均值	3 014 358.196 1	3 014 265.270 6	3 014 292.517 4	60.332 2	60.364 7	60.367 9	3.326 1	3.253 3	3.307 2
	标准差	1 589.610 0	1 728.196 7	1 696.484 1	0.028 2	0.028 6	0.028 5	0.341 0	0.331 4	0.337 9
法向	均值	3 014 351.696 3	3 014 250.564 6	3 014 322.426 1	60.332 7	60.364 7	60.367 8	3.325 1	3.252 8	3.307 2
	标准差	19.192 6	19.225 4	10.546 9	0.000 3	0.000 3	0.000 3	0.006 1	0.006 0	0.008 1

时,误差的方向对构型产生显著影响。切向误差使构型标准差产生的变化远大于其他两个方向的误差。切向速度误差增加了卫星的动能,所以构型产生的扰动更大。因此,航天器发射时需优先考虑减小切向速度误差。

### 5.2 误差大小对构型的影响

#### (1) 不同大小的位置误差

因为径向位置误差对构型影响最大,因此在本节中仅以径向位置误差为例分析误差大小对构

型的影响。

首先以任务周期4年为例,同时向卫星1,2,3增加正态分布的径向位置误差,误差均值分别为100 km,1 000 km,构型变化表4所示。

同时向三颗卫星增加径向位置误差时,位置误差对构型的影响不明显。当误差均值为100 km和1 000 km时,只考虑均值时构型指标满足要求,但观察标准差发现,1 000 km时标准差增大,构型发散不满足指标要求。

表4 误差大小对构型的影响(周期4年)

Tab.4 Effect of error magnitude on constellation( $T=4$  years)

		$L_{12}/\text{km}$	$L_{13}/\text{km}$	$L_{23}/\text{km}$	$\theta_1/(\text{°})$	$\theta_2/(\text{°})$	$\theta_3/(\text{°})$	$v_{12}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{13}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{23}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
位置 误差 (km)	100	均值 3 014 428.590 4	3 014 411.924 5	3 014 041.631 1	60.328 4	60.365 1	60.369 2	3.334 9	3.260 2	3.307 2
		标准差 3 117.635 1	3 413.799 0	3 306.621 0	0.055 8	0.056 6	0.055 9	0.653 4	0.635 7	0.670 9
1 000		均值 3 015 125.864 9	3 015 879.464 1	3 011 524.225 5	60.290 0	60.395 3	60.382 6	3.426 0	3.329 6	3.307 1
		标准差 31 181.532 3	34 145.594 2	33 072.501 0	0.558 2	0.566 5	0.558 4	6.536 3	6.357 7	6.709 2
速度 误差 (cm/s)	1	均值 3 014 358.196 1	3 014 265.270 6	3 014 292.517 4	60.332 2	60.364 7	60.367 9	3.326 1	3.253 3	3.307 2
		标准差 1 589.610 0	1 728.196 7	1 696.484 1	0.028 2	0.028 6	0.028 5	0.341 0	0.331 4	0.337 9
10		均值 3 014 420.979 4	3 014 400.901 6	3 014 015.281 3	60.327 8	60.365 1	60.368 9	3.337 6	3.261 3	3.307 2
		标准差 15 896.848 4	17 283.056 3	16 965.747 2	0.282 5	0.286 6	0.285 2	3.410 3	3.314 5	3.379 6

#### (2) 不同大小的速度误差

因为切向速度误差对构型影响最大,因此在本节中仅以切向速度误差为例分析误差大小对构型的影响。

同时向卫星1,2,3增加正态分布的切向速度误差,误差均值分别为1 cm/s,10 cm/s,构型变化如表4所示。

向三颗卫星同时增加相同方向速度误差时,

速度误差对构型的影响不明显。当误差均值为1 cm/s和10 cm/s时,只考虑均值时构型指标满足要求,当误差均值为10 cm/s时虽然标准差增大,但由于任务周期短,构型发散程度小,仍然满足指标要求。

为比较周期4年和10年时误差大小对构型的影响,对周期为10年的情况重复上述仿真,结果如表5所示。当位置误差为100 km和速度误

表5 误差大小对构型的影响(周期10年)

Tab.5 Effect of error magnitude on constellation( $T=10$  years)

		$L_{12}/\text{km}$	$L_{13}/\text{km}$	$L_{23}/\text{km}$	$\theta_1/(\text{°})$	$\theta_2/(\text{°})$	$\theta_3/(\text{°})$	$v_{12}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{13}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{23}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
位置 误差 (km)	100	均值 3 030 326.996 2	3 026 882.999 7	3 029 905.409 1	60.812 6	60.961 1	60.837 5	7.141 1	7.289 3	6.943 0
		标准差 6 605.262 9	7 012.686 8	6 858.372 8	0.113 9	0.116 9	0.115 6	1.368 2	1.331 3	1.399 6
1 000		均值 3 030 641.096 1	3 032 443.748 6	3 032 228.912 6	60.794 5	61.047 3	60.880 9	7.094 2	7.369 7	7.211 6
		标准差 66 186.719 5	70 279.365 3	68 727.030 2	1.142 7	1.172 6	1.156 9	13.711 8	13.338 2	14.028 1
速度 误差 (cm/s)	1	均值 3 030 296.274 1	3 026 334.210 6	3 029 681.672 2	60.814 6	60.960 2	60.833 2	7.153 9	7.281 6	6.943 0
		标准差 3 302.646 5	3 514.742 4	3 443.595 4	0.057 4	0.058 3	0.058 0	0.697 2	0.671 0	0.701 9
10		均值 3 030 333.464 7	3 026 914.277 1	3 029 929.590 2	60.810 2	60.961 1	60.837 9	7.122 8	7.292 2	6.943 0
		标准差 33 043.461 5	35 166.530 0	34 453.912 5	0.574 7	0.584 1	0.580 2	6.975 9	6.713 4	7.023 3

差为 1 cm/s 时构型满足指标要求; 当位置误差为 1 000 km 和速度误差为 10 cm/s 时构型不满足指标要求。当比较任务周期为 4 年和 10 年两种情况, 发现标准差大小随时间增加, 任务周期延长时, 大小相等的入轨误差会使构型产生更大扰动。

### 5.3 三星间相对误差方向对构型的影响

当航天器发射存在入轨误差时, 三卫星误差的相对方向可能会对构型产生不同的影响。下文

将探究相对方向相反的入轨误差对构型产生的影响。

#### (1) 相对方向相反的位置误差

以任务周期 4 年为例, 分别向三卫星径向、切向、法向施加均值为 100 km 的正态分布的, 相对方向相同和相反的位置误差, 构型变化如表 6 所示。

表 6 相对位置误差方向对构型的影响

Tab. 6 Effect of direction of relative position error on constellation

		$L_{12}/\text{km}$	$L_{13}/\text{km}$	$L_{23}/\text{km}$	$\theta_1/(\text{°})$	$\theta_2/(\text{°})$	$\theta_3/(\text{°})$	$v_{12}/$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	$v_{13}/$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	$v_{23}/$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
同向	均值	3 014 404.364 8	3 014 472.578 8	3 014 042.126 2	60.328 9	60.365 3	60.368 9	3.332 0	3.262 1	3.307 4
	标准差	3 118.707 5	3 413.855 9	3 307.072 1	0.055 8	0.056 6	0.055 9	0.653 6	0.635 9	0.670 9
反向	均值	3 014 880.772 5	3 017 790.780 4	3 036 402.176 6	60.615 7	60.450 6	60.691 8	3.330 4	2.701 4	6.571 9
	标准差	3 118.703 5	3 413.773 0	3 306.951 0	0.056 2	0.056 9	0.056 8	0.653 6	0.636 6	0.671 9

由于增加的位置误差大小相等, 方向相反, 构型标准差相同, 反向误差的扰动大于同向误差。当航天器受到的位置误差相对方向不同时, 构型产生的扰动更大。

#### (2) 相对方向相反的速度误差

分别向三卫星径向、切向、法向施加均值为 10 cm/s 的正态分布的, 相对方向相同和相反的速度误差, 构型变化如表 7 所示。

表 7 相对速度误差方向对构型的影响

Tab. 7 Effect of direction of relative velocity error on constellation

		$L_{12}/\text{km}$	$L_{13}/\text{km}$	$L_{23}/\text{km}$	$\theta_1/(\text{°})$	$\theta_2/(\text{°})$	$\theta_3/(\text{°})$	$v_{12}/$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	$v_{13}/$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )	$v_{23}/$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
同向	均值	3 014 560.508 0	3 014 090.939 2	3 014 013.501 6	60.324 7	60.363 6	60.371 0	3.354 8	3.249 2	3.307 0
	标准差	15 919.053 4	17 283.325 7	16 969.347 4	0.282 5	0.286 7	0.285 3	3.410 6	3.316 8	3.379 7
反向	均值	3 056 876.709 7	3 086 759.715 3	3 016 355.104 0	61.326 9	61.622 6	60.953 2	12.264 3	14.365 1	3.378 8
	标准差	15 914.563 5	17 282.0559	16 969.318 3	0.282 3	0.287 8	0.283 0	3.408 2	3.310 1	3.379 4

由于增加的速度误差大小相等, 方向相反, 构型标准差相同, 反向误差的扰动大于同向误差。当航天器受到的速度误差相对方向不同时, 构型产生的扰动更大。

无论是位置误差还是速度误差, 当航天器受到的误差相对方向相同时, 误差对构型的影响明显小于误差相对方向相反时的情况。这也为任务入轨工作带来一些启示, 如果无法减小入轨误差的绝对值, 可以通过使三卫星受到的误差保持相同方向, 减小入轨误差对构型的影响, 保证后续任务顺利完成。

### 5.4 位置速度误差对构型的影响

入轨位置误差和速度误差通常同时存在, 方向也可能不同, 因此下文将分析两种不同方向的误差同时存在对构型产生的影响。以周期 4 年为例, 使切向速度误差由 0.5 cm/s 逐渐增加至 3 cm/s, 并调整径向位置误差的大小, 以臂长在  $3 \times 10^6 \pm 3.5 \times 10^4$  km 内为标准, 记录使构型发散的位置误差临界点, 如图 3 所示。

由图 3 可知, 速度误差的影响大于位置误差, 对于同一构型, 当速度误差增大时, 为满足指标要求需减小位置误差。当速度误差是 0.5 cm/s, 位

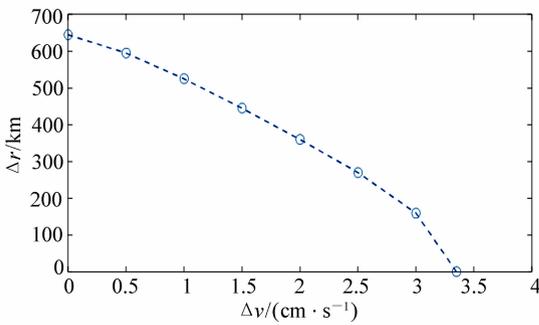


图3 位置误差与速度误差的关系

Fig. 3 Relationship between position error and velocity error

置误差将超过595 km时构型发散;当速度误差是3 cm/s,位置误差超过160 km时构型发散。

## 6 结 论

本文首先介绍了空间引力波探测任务的动力学模型;运用 CADET 法提出了空间引力波探测任务入轨误差传播方程;进行 CADET 方法仿真

和 Monte-Carlo 法仿真,并比较二者结果;以本文构型为例,运用 CADET 方法对入轨误差的影响进行分析。仿真结果表明:

(1)以 Monte-Carlo 法结果为标准,CADET 法在 10 年任务周期内与其相对误差不超过 6%,CADET 法可以进行有初始误差情况下的任务过程的误差传播分析;

(2)在相同环境下完成 Monte-Carlo 法 1 000 次抽样运算平均用时约为 15 min,而 CADET 法平均用时不超过 1 min,CADET 法可以实现任务过程中对误差传播的快速预测,用时远小于 Monte-Carlo 法。

(3)径向位置误差和切向速度误差分别改变了卫星的势能和动能,对空间引力波探测任务构型影响较大。当误差的相对方向相同时,对构型的影响小于相对方向不同时,可以通过保持误差方向相同减小入轨误差对构型的影响。当周期为 4 年且同时存在两种误差时,位置误差不超过 160 km,速度误差不超过 3 cm/s 时,构型仍满足指标要求。

## 参考文献:

- [1] 黄双林,龚雪飞,徐鹏,等.空间引力波探测——天文学的一个新窗口[J].中国科学:物理学力学天文学,2017,47(1):010404.  
HUANG SH L,GONG X F,XU P,*et al.*. Gravitational wave detection in space—a new window in astronomy[J]. *Scientia Sinica Physica, Mechanica & Astronomica*,2017,47(1):010404. (in Chinese)
- [2] 罗子人,白姍,边星,等.空间激光干涉引力波探测[J].力学进展,2013,43(4):415-447.  
LUO Z R,BAI SH,BIAN X,*et al.*. Gravitational wave detection by space laser interferometry [J]. *Advances in Mechanics*,2013,43(4):415-447. (in Chinese)
- [3] 王智,马军,李静秋.空间引力波探测计划-LISA 系统设计要点[J].中国光学,2015,8(6):980-987.  
WANG ZH,MA J,LI J Q. Space-based gravitational wave detection mission;design highlights of LISA system[J]. *Chinese Optics*,2015,8(6):980-987. (in Chinese)
- [4] LUO J,CHEN L SH,DUAN H Z. TianQin;a space-borne gravitational wave detector[J]. *Classical and Quantum Gravity*,2016,33(3):035010.
- [5] HU X CH,LI X H,WANG Y F,*et al.*. Fundamentals of the orbit and response for TianQin[J]. *Classical and Quantum Gravity*,2018,35(9):095008.
- [6] LUO Y ZH,YANG ZH. A review of uncertainty propagation in orbital mechanics[J]. *Progress in Aerospace Sciences*,2017,89:23-39.
- [7] 罗绪盛,荆武兴,高长生.火星探测捕获的误差传播分析[J].系统工程与电子技术,2017,39(7):1590-1595.  
LUO X SH,JING W X,GAO CH SH. Error propagation analysis of capture for Mars exploration[J]. *Systems Engineering and Electronics*,2017,39(7):1590-1595. (in Chinese)
- [8] 夏炎.引力波探测计划 LISA 的任务轨道设计与优化[D].南京:中国科学院紫金山天文台,2009.  
XIA Y. Orbit design and optimization for the LISA gravitational wave observatory[D]. Nanjing:Purple Mountain Observa-

tory, Chinese Academy of Sciences, 2009. (in Chinese)

- [9] 王有亮. 卫星编队飞行相对轨迹优化与控制[D]. 北京:中国科学院大学, 2018.  
WANG Y L. Relative trajectory optimization and control for satellite formation flying[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2018. (in Chinese)
- [10] 陈磊, 韩蕾, 白显宗, 等. 空间目标轨道力学与误差分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.  
CHEN L, HAN L, BAI X Z, *et al.*. *Orbital Dynamics and Error Analysis of Space Object*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010. (in Chinese)
- [11] 张兵. 大气层外动能拦截器末制导段性能研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2005.  
ZHANG B. End-game performance analysis of exo-atmospheric kinetic vehicle[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2005. (in Chinese)
- [12] 梁立波, 罗亚中, 杏建军, 等. 基于协方差分析描述函数法的非线性交会精度分析[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(9):1977-1981.  
LIANG L B, LUO Y ZH, XING J J, *et al.*. Precision analysis of nonlinear rendezvous by covariance analysis description equation technique[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(9):1977-1981. (in Chinese).

#### 作者简介:



李卓(1992—), 女, 黑龙江大庆人, 博士研究生, 主要从事航天器轨道设计与优化方面的研究。E-mail: 15046084839@163.com



李明涛(1982—), 男, 河南商丘人, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要从事航天器轨道动力学与控制方面的研究。E-mail: limingtao@nssc.ac.cn