

文章编号 1674-2915(2009)06-0525-06

# 应用 CS 理论实现同步采样压缩成像

郭军伟

(安徽大学,安徽合肥 230031)

**摘要:**为了减轻图像数据存储负担,实现图像在网络上的快速传输和实时处理,对一种新的压缩传感(CS)理论进行了研究。介绍了压缩传感理论的主要思想和基于压缩传感理论的光学成像系统,给出了一种新型图像重建算法—和谐正交匹配追踪算法,并进行了相应的模拟实验。实验结果显示,该成像机制可同步完成图像的采样与数据压缩,同时可获得良好的图像重建效果。由于该方法所要传输的信号数据量较小,所以十分有利于远距离的图像传输。

**关键词:**压缩传感理论;压缩成像;匹配追踪;稀疏表示

中图分类号:TN919.8 文献标识码:A

## Imaging system of synchronous sample and compression based on CS theory

GUO Jun-wei

(Anhui University, Hefei 230031, China)

**Abstract:** With the aim to realise the transmission of the digital image information with a high-speed and real-time processing and to reduce the amount of data of the storage, a new theory for image compression, Compressed Sensing(CS), is investigated to solve the problem. The concept of CS theory is introduced and a system for the optical image based on the CS theory is designed, and then it presents a new algorithm for rebuilding the image—Harmonic Orthogonal Matching Pursuit(HXOMP) algorithm. The corresponding numerical simulation and experimental results show that the imaging mechanism can capture the image and compress the data at the same time, and this method can also obtain good results of rebuilding images. Due to small amount of the data used, this method is very useful to transform images with a long distance.

**Key words:** Compressed Sensing(CS) theory; compressive imaging; matching pursuit; sparse representation

### 1 引言

传统的信号获取和处理过程主要包括采样、

压缩、传输和解压缩四个部分。传统的数字成像系统首先尽量多的采样,然后再进行数据压缩。其采样过程必须满足香农采样定理,即采用频率不能低于模拟信号频谱中最高频率的2倍。然而

对于数字图像和视频的获取,依照香农定理会导致海量采样数据,大大增加了存储和传输的代价。因此,人们必须面对的问题是,如果信号本身是可压缩的,那么是否可以直接获取其压缩表示(即压缩数据),从而略去对大量无用信息的采样?在满足重建图像的质量要求下,是否可用光学方法进行更少的采样?对于上述问题,一种新兴的压缩传感(CS)理论为数据采集技术带来了革命性的突破。CS理论以远低于奈奎斯特频率进行采样,该理论为压缩成像系统提供了数学基础。

CS的基本思想是,如果图像用一个已知的变换,诸如小波变换或者傅里叶变换是可压缩的,那么图像可以用比原始像素数量少的测量来精确重建。压缩传感理论主要包括信号的稀疏表示、编码测量和重构算法。

## 2 图像信号稀疏表示

如果一个信号中只有少数元素是非零的,则该信号是稀疏的。在众多信号处理的应用中,都希望找到这种稀疏的数据表示。用稀疏逼近取代原始数据表示可从实质上降低信号处理的成本,提高压缩效率。信号的稀疏表示就是将信号投影到正交变换基时,绝大部分变换系数的绝对值很小,所得到的变换向量是稀疏或者近似稀疏的,可以将其看作原始信号的一种简洁表达,这是压缩传感的先验条件,即信号必须在某种变换下可以稀疏表示<sup>[1]</sup>。通常变换基可以根据信号本身的特点灵活选取,常用的有离散余弦变换基、快速傅里叶变换基、离散小波变换基、Curvelets基、Gabor基以及冗余字典<sup>[2]</sup>等。

根据调和理论,一个长度为 $N$ 的一维离散时间信号 $f$ ,可以表示为一组标准正交基的线性组合:

$$f = \sum_{i=1}^N x_i \psi_i \quad \text{或} \quad f = \Psi x,$$

其中 $\Psi$ 为矩阵, $\psi_i$ 为列向量, $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ , $\psi_i$ 为 $N$ 维向量,如图1所示。向量 $x$ 是 $f$ 的加权系数序列, $x_i = \langle f | \psi_i \rangle = \psi_i^T f$ 。可见 $x$ 是信号 $f$ 的等价表示。如果 $x$ 只有很少的大系数,则

称 $f$ 是可压缩的。如果 $x$ 只有 $K$ 个元素为非零,则称 $x$ 为信号 $f$ 的 $K$ 稀疏表示。另外,当信号不能用正交基稀疏表示时,可以采用冗余字典稀疏表示。

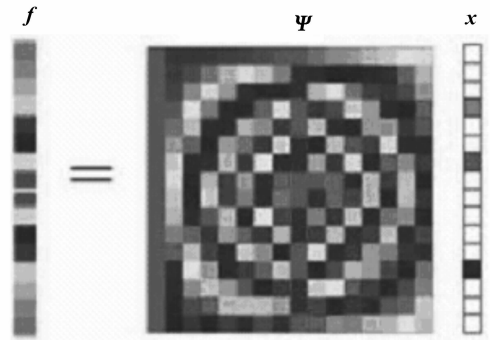


图1 用基 $\Psi$ 进行稀疏表示(3-稀疏)

Fig. 1 Sparse representation based on  $\Psi$ (3-sparse)

从分解结果可以得到信号的一个非常简洁的表达,即信号稀疏表示,得到信号稀疏表示的过程称为信号的稀疏分解。由于信号稀疏表示的良好特性,信号稀疏分解引起许多学者的兴趣<sup>[3]</sup>,信号的稀疏表示也已经被应用到信号处理的许多方面<sup>[4]</sup>。

## 3 压缩传感理论

### 3.1 理想信号重构

首先考虑一般的信号重构问题,即已知某一个矩阵 $\Omega \in R^{M \times N}$ ( $M \ll N$ 以及某未知信号 $x \in R^N$ 在该矩阵下的线性测量值 $y = R^M$ 。

$$y = \Omega x, \quad (2)$$

式(2)可以看作原信号 $x$ 在 $\Omega$ 下的线性投影,现在考虑由 $y$ 重构 $x$ 。很显然,由于 $y$ 的维数远远低于 $x$ 的维数,方程 $y = \Omega x$ 有无穷多个解,即该问题是不确定的,很难重构原始信号。然而,如果原始信号 $x$ 是 $K$ 稀疏的,并且 $y$ 与 $\Omega$ 满足一定条件,理论证明,信号 $x$ 可以由测量值 $y$ 通过求解最优 $l_0$ 范数问题精确重构<sup>[5]</sup>。

$$\hat{x} = \operatorname{argmin} \|x\|_0 \text{ s. t. } \Omega x = y, \quad (3)$$

式(3)中, $\|\cdot\|_0$ 为向量的 $l_0$ 范数,表示向量 $x$ 中非零元素的个数。如果要精确重构 $K$ 稀疏信

号  $x$ , 测量次数  $M$  (即  $y$  的维数) 必须满足  $M = O(K \log(N))$ , 并且矩阵  $\Omega$  必须满足约束等距性条件<sup>[6]</sup>。

### 3.2 自然信号重构

常见的自然信号在时域内几乎都是不稀疏的, 因而上述信号重构过程不能直接应用于自然信号的重构。虽然时域内的自然信号都是非稀疏的, 但是在某些变换域可能是稀疏的。对于一幅自然图像, 几乎所有的像素值都是非零的, 但是将其变换到小波域时, 大多数小波系数的绝对值都接近于零, 并且有限的大系数能够表示出原始图像的绝大部分信息。

根据信号稀疏表示理论指出, 自然信号可以通过某种变换  $\Psi$  进行稀疏表示, 即  $f = \Psi x$ , 则有:

$$g = \Phi f = \Phi \Psi x = \Omega x, \quad (4)$$

其中  $\Omega = \Phi \Psi$  为  $M \cdot N$  的矩阵,  $\Omega$  被称为传感矩阵。 $g$  可以看作是稀疏信号  $x$  关于矩阵  $\Omega$  的测量值。这时如果  $\Omega$  满足约束等距条件, 可以通过求解一个最优  $l_0$  范数问题来重构  $K$  稀疏信号  $x$ , 如图 2 所示, 即:

$$\hat{x} = \operatorname{argmin} \|x\|_{0} \text{ s. t. } \Omega x = g, \quad (5)$$

式中,  $\|\cdot\|_0$  为向量的  $l_0$  范数, 表示向量  $x$  中非零元素的个数。如果要精确重构  $K$  稀疏信号  $x$ , 测量次数  $M$  (即  $y$  的维数) 必须满足  $M = O(K \log(N))$ , 并且矩阵  $\Omega$  必须满足约束等距性条件。

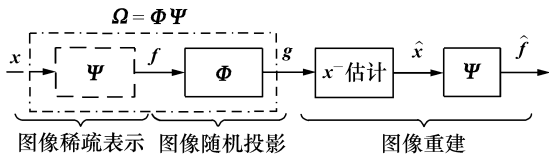


图 2 压缩传感理论系统图

Fig. 2 Imaging scheme of compressed sensing

由于  $\Psi$  是固定的, 要使得  $\Omega = \Phi \Psi$  满足约束等距条件, 则测量矩阵  $\Phi$  就必须满足一定的条件。如果已经得到了  $f$  的稀疏表示  $\hat{x}$ , 可以进一步由变换基  $\Psi$  通过下式精确重构原始信号  $\hat{x}$ :

$$\hat{f} = \Omega \hat{x}. \quad (6)$$

上述就是压缩传感的核心思想, 即与传统信号采样方法对原始信号  $f$  先采样后压缩不同, 压缩传感由少量线性测量通过求解最优化问题直接得到信号  $f$  的压缩表示  $x$ , 如图 3 所示, 突破了香

农采样定理的瓶颈, 降低了对传感器分辨率的要求, 使得超高分辨率信号获取成为可能。

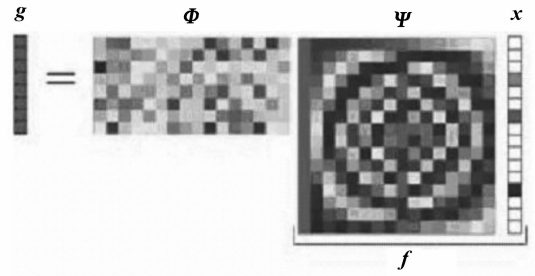


图 3 压缩传感线性测量过程

Fig. 3 Linear measurement of compressive sensing

## 4 数字成像系统

压缩成像系统主要由两部分组成: 光学系统和数字信号处理系统, 如图 4 所示。通过获取目标的随机投影图, 然后应用合适的数字重建运算法则, 来进行重建图像。

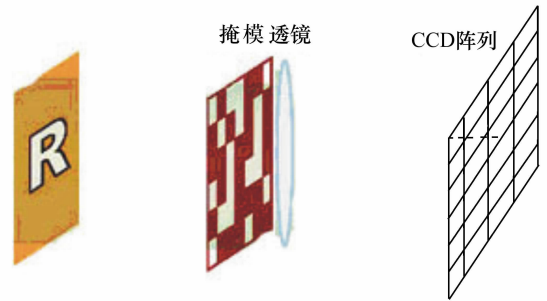


图 4 压缩成像系统示意图

Fig. 4 Compressed imaging scheme

传感矩阵  $\Omega$  必须满足约束等距性, 约束等距性的等价条件是测量矩阵  $\Phi$  与稀疏表示的基  $\Psi$  不相关, 即要求  $\Phi$  的行  $\phi_j$  不能由  $\Psi$  的列  $\varphi_i$  稀疏表示, 且  $\Psi$  的列  $\varphi_i$  不能由  $\Phi$  的行  $\phi_j$  稀疏表示。由于  $\Psi$  是固定的, 当  $\Phi$  是高斯随机测量矩阵时, 传感矩阵  $\Omega$  能以较大概率满足约束等距性条件<sup>[7]</sup>, 因此可以通过选择一个大小为  $M \cdot N$  的高斯随机测量矩阵得到, 其中每一个值都满足独立正态分布。高斯测量矩阵的优点在于它几乎与任意稀疏信号都不相关, 因而所需的测量次数最小。

在传统的光学成像系统中增加了一个非球面

随机相位掩模板,紧贴在透镜上。压缩成像系统采用随机相位掩模把图像随机地投影到 CCD 探测器上。如果掩模的相干波长  $\rho$  足够小,那么掩模可以产生要求的随机投影。此时,随机相位掩模的功能相当于测量矩阵  $\Phi$ 。透镜的直径是  $D$ ,焦距是  $f_1$ 。物体放在距离透镜  $z_1$  的位置,掩模衍射光线通过透镜聚焦,光线到达 CCD 探测阵列, CCD 位于透镜后面  $z_0$  位置。

当光路通过此相位掩模板后,光信息被编码,即整个光学系统的调制传递函数(MTF)和点扩散函数(PSF)会发生改变,虽然编码后的 MTF 值要小于编码前的值,但是在有离焦量的情况下它不会出现零值,所以不会造成图像细节信息的丢失。

在 CCD 上的成像是一幅模糊图像,用数字信号处理系统对它进行解码,此时系统的 MTF 值也会相应提高,从而恢复出锐利清晰的图像。

## 5 信号重构算法

这里讨论在已知测量向量以及随机测量矩阵并给定稀疏基的基础上,如何利用尽可能少的测量数目和重建时间去实现信号(图像)稳定、精确的重建。信号重构问题可以通过求解最小  $l_0$  范数问题加以解决,最小  $l_0$  范数问题是一个 NP-hard 问题,需要穷举  $\mathbf{x}$  中非零值的所有  $C_N^K$  种排列可能,因而无法求解。通常需要对该问题进行转换,如将  $l_0$  范数转化为  $l_1$  范数问题加以解决。鉴于此,人们提出了一系列的次最优解的算法,主要包括最小  $l_1$  范数法<sup>[8]</sup>和匹配追踪系列算法<sup>[9]</sup>。

### 5.1 最小 $l_1$ 范数法

采用  $l_1$  范数代替  $l_0$  范数,得到了如下问题

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{x}\|_{1, s. t.} \Omega \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (7)$$

式(7)是一个凸最优问题,可以转化成线性规划问题加以求解,计算复杂度为  $O(N^3)$ ,这种方法也称为基追踪方法。

### 5.2 和谐正交匹配追踪算法(HXOMP)

匹配追踪算法是一种贪婪迭代算法,其基本思想是在每一次的迭代过程中,从完备原子库里(测量矩阵  $\Phi$ )选择与信号最匹配的原子来构建稀疏逼近,并求出信号残差,然后继续选择与信

号残差最为匹配的原子,经过一定次数的迭代,信号可以由一些原子线性表示。但是由于信号在已选定原子(测量矩阵的列向量)集合上的投影的非正交性使得每次迭代的结果可能是次最优的,因此为获得收敛可能需要经过较多次迭代。

和谐正交匹配追踪算法(如图5所示)则有效克服了这个问题,该算法沿用了匹配追踪算法中的原子选择准则,通过递归的已选择原子集合进行正交化以保证迭代的最优性,设立基于最佳接收准则的门限值来进行选择,从而减少了迭代次数。最佳接收准则中最直观和合理的是“最小差错概率”准则,由最小差错概率准则导出似然比准则后,数字信号的最佳接收在理论上就变为收到一个信号后,分别计算似然函数值,然后进行比较并判决。

对  $K$  稀疏  $N$  维离散时间信号  $\mathbf{x}$ ,用一个  $M \cdot N$  的高斯矩阵测量时,只要  $M = O(K \log(N))$ ,和谐正交匹配追踪算法以极大概率准确重构信号,而且比最小  $l_1$  范数法更快。但是,和谐正交匹配追踪算法精确重构的理论保证比最小  $l_1$  范数法弱,对于测量矩阵的要求比约束等距性更加严格。

综合考虑,和谐正交匹配追踪系列算法对于维数较低的小尺度信号问题运算速度很快。

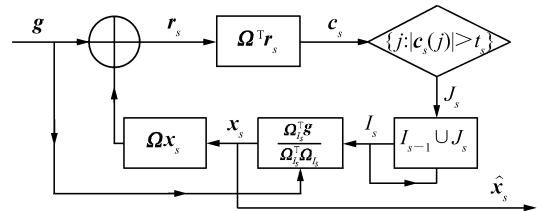


图5 和谐正交匹配追踪算法示意图

Fig. 5 Block diagram of HXOMP algorithm

和谐正交匹配追踪算法步骤:

输入:传感矩阵  $\Omega$ ,采样向量  $\mathbf{g}$ ,稀疏值  $K$ ;

输出: $\mathbf{x}$ 的  $K$ -稀疏的逼近估值  $\hat{\mathbf{x}}$ ;

初始化: $\mathbf{x}_0 = 0$ ,残差  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g}$ ,阶段计数  $s = 1$ ;

步骤1:算法保持  $\mathbf{x}_0$  中的非零位置的一个估值序列  $I_0, \dots, I_s$ ,第  $s$  步应用在当前残差的匹配滤波器,给出与残差相关的一个向量  $\mathbf{c}_s = \Omega^T \mathbf{r}_s$ ,它包含一些在入口处被噪声干扰的非零矢量信号。

步骤2:设置一个门限值来发现大的非零值,

这个阈值的设置基于最佳接收准则。通过门限值生成新集合  $J_s$ :

$$J_s = \{j: |c_s(j)| > t_s\}, \quad (8)$$

$t_s$  是门限值参数,新集合和前坐标估值合并,再更新当前坐标估值:

$$I_s = I_{s-1} \cup J_s, \quad (9)$$

步骤3:把向量  $\mathbf{g}$  投影到传感矩阵  $\Omega$  的列  $\Omega_l, \Omega_l$  表示坐标  $l$  所选中的  $\Omega$  中的列,则有新的逼近  $\mathbf{x}_s$ ,在  $I_s$  中的新系数如下:

$$(\mathbf{x}_s)_{I_s} = \frac{\Omega_{I_s}^T \mathbf{g}}{\Omega_{I_s}^T \Omega_{I_s}}, \quad (10)$$

步骤4:更新残差:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{g} - \Omega \mathbf{x}_s, \quad (11)$$

步骤5:设置停止条件:

如果不是停止时间,令  $s = s + 1$ ,然后进行迭代运算

如果是停止时间,停止迭代,令  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_s$ ,输出结果。

## 6 模拟实验

### 6.1 对字母“f”的模拟

对字母“f”的压缩图像和重建图像进行了模拟。图6(a)是原始图像,256 pixel  $\times$  256 pixel 像素,图6(b)是捕获的图像,256 pixel  $\times$  64 pixel 像素。由于随机投影图即图6(b)所示的图像没有绝对的视觉意义。图6(c)显示了采用和谐正交匹配追踪算法重建的图像。即使图6(b)捕获图像采用了16 384个样本,它只有原始图像的25%,重构也是可行的。且重构的误差率约为  $10^{-6}$ 。

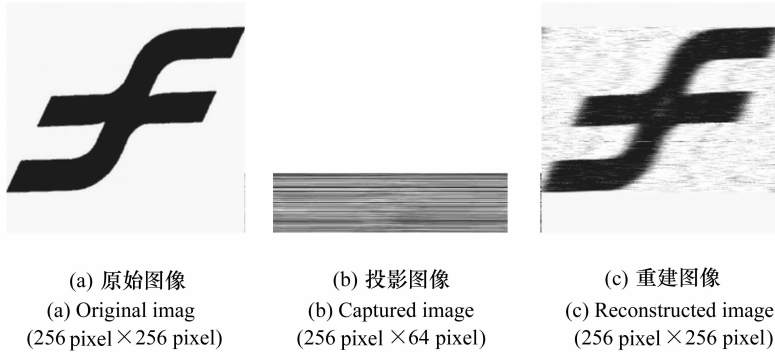


图6 CI图像的模拟结果

Fig. 6 Simulation of CI images

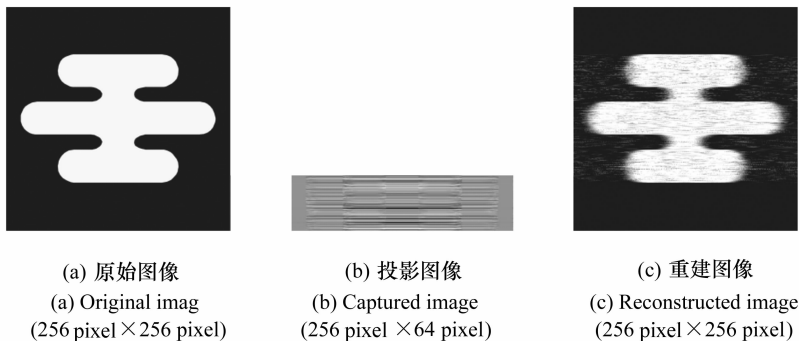


图7 CI图像的模拟结果

Fig. 7 Simulation of CI images

## 6.2 对图像王字的模拟

对圆圈图像的压缩图像和重建图像进行了模拟。图7(a)是原始图像,256 pixel  $\times$  256 pixel,图7(b)是捕获的图像,256 pixel  $\times$  64 pixel。由于是随机投影图,图7(b)所示的图像没有绝对的视觉意义。图7(c)显示了采用和谐正交匹配追踪算法的重建图像。即使图7(b)捕获图像采用了16384个样本,它只有原始图像的25%,重构仍是可行的。重构的误差率约是 $10^{-6}$ 。

## 7 结 论

本文详细介绍了一种新颖的成像方式,该方

式表明运用CS理论可以通过后加工处理进行重建图像。模拟实验表明,在拍摄相同的次数的情况下,与传统成像方法相比,新成像方法采集信息量少,传输更迅速便捷;在同样的网络传输条件,重构图像的信噪比比传统方法高3 dB,即效果更好。新成像方法既可以应用于简单场景也可以应用于复杂场景,还可以对重构图像进行去噪和增强处理,以便取得更好的可视效果。与追踪算法和匹配追踪算法相比,和谐正交匹配追踪算法是一个较快的算法,重构图像的实时性强,基本上可以实现顺畅播放。实验还表明,通过优化成像设备和重建算法,CS技术可以进一步提高,并有望延伸到三维领域。

## 参考文献:

- [1] COIFMAN R R, WICKERHAUSE M V. Entropy-based algorithms for best-basis selection[J]. *IEEE Trans. Info. Theory*, 1992,38(2):713-718.
- [2] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuit with time frequency dictionaries[J]. *IEEE Tans. Sign. Proc.*, 1993,41(12):3397-3415.
- [3] GRIBONVAL R, NIELSEN M. Approximation with highly redundant dictionaries[J]. *SPIE*, 2003,5207:216-227.
- [4] GRIBONVAL R, BACRY E. Harmonic decomposition of audio signals with matching pursuit[J]. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 2003,51(1):101-111.
- [5] DURATE M F, SARVOTHAM S, BARON D, et al. Distributed compressed sensing of jointly sparse signal[C]. 39th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2005, 1537-1541.
- [6] CANDS E, TAO T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Trans. Info. Theory*, 2005,51(12):4203-4215.
- [7] CANDS E, ROMBERG J, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Commun. Pur. Appl. Math.*, 2006,59(8):1207-1223.
- [8] MALLAT S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*[M]. San Diego, USA: Academic Press, 1996.
- [9] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *Trans. Info. Theory*, 2007,53(12):4655-4666.

作者简介:郭军伟(1985—),男,山东聊城人,硕士研究生,主要从事压缩传感理论方面的研究。

E-mail:guojunweihello@163.com